

ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СКРЫТЫХ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЦИКЛИЧНОСТИ РАЗВИТИЯ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ*

ЧЕРНОВА Н. Л.

кандидат экономических наук

Харьков

Алгоритмы прогнозирования цикличности развития экономических систем наряду с общепринятыми методами, такими как выделение циклической составляющей временного ряда, спектральный анализ, ARIMA-модели, предлагается использовать скрытые марковские модели.

В скрытой марковской модели (СММ) присутствует два типа переменных: ненаблюдаемая непосредственно, скрытая переменная $F(t)$ и доступная непосредственному наблюдению и измерению переменная $O(t)$. Значение скрытой переменной $F(t)$ (в момент времени t) зависит только от значения скрытой переменной $F(t-1)$ (в момент $t-1$). Значение наблюдаемой переменной $O(t)$ зависит только от значения скрытой переменной $F(t)$.

Предлагается в качестве скрытой переменной $F(t)$ рассматривать фазу цикла экономической системы, а в качестве переменной $O(t)$ взять социально-экономические показатели, характеризующие цикличность развития экономической системы.

Выбор СММ в качестве инструмента прогнозирования обусловлен следующими допущениями и предположениями:

1. Под состоянием экономической системы государства будем понимать вектор $X_t = (x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tm})$, где x_{tj} – значение j -го показателя, описывающего состояние системы и характеризующего цикличность ее развития в t -й период, $j = [1, m]$, $t = [1, T]$.

2. Число возможных состояний системы счетное и ограничено числом анализируемых периодов функционирования системы, смена состояния возможна каждый месяц. Поэтому процесс смены состояний будем рассматривать как случайный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем.

3. Исходное множество состояний необходимо разбить на однородные классы (фазы цикла). Так как априори предполагается наличие явления цикличности в развитии системы, следовательно, классы состояний системы должны периодически повторяться. Любой

цикл содержит четыре основные фазы, – процветание, рецессия, депрессия, восстановление. Большинство авторов придерживается мнения, что фазы любого цикла, как правило, сменяют друг друга в определенной последовательности, т. е., например, невозможен непосредственный переход из фазы процветания в фазу восстановления, минуя фазы рецессии и депрессии [1, 2]. Поэтому предположим, что вероятность наступления очередной фазы зависит только от того, в какой фазе находилась система в предыдущем состоянии и не зависит от того, когда и как система пришла в это состояние. Следовательно, процесс смены фаз цикла можно рассматривать как случайный марковский процесс с дискретными состояниями и дискретным временем.

4. Фаза цикла не является непосредственно измеримым, наблюдаемым показателем, т. е. процесс смены фаз является скрытым, ненаблюдаемым непосредственно для исследователя. Определить конкретное значение переменной «фаза цикла» можно только опосредованно через систему наблюдаемых и измеряемых непосредственно социально-экономических показателей, предполагая, что в зависимости от того, в какой фазе находится система, изменяются значения наблюдаемых непосредственно показателей.

Следовательно, для прогнозирования фазы цикла можно использовать аппарат теории скрытых марковских случайных процессов.

СММ в общем виде можно представить как

$$\lambda = (P, B, w),$$

где $P = \{p_{ij}\}_{l \times l}$, $i, j = [1, l]$ – распределение вероятностей переходов между фазами, l – число фаз цикла;

$B = \{b_j(k)\}$, $j = [1, l]$, $k = [1, M]$ – распределение вероятностей появления значения наблюдаемого показателя, $b_j(k)$ – вероятность появления значения наблюдаемого показателя из k -го диапазона при условии, что система находилась в j -й фазе, M – число различных интервалов значений непосредственно наблюдаемого показателя;

$w = (w_1, w_2, \dots, w_l)$ – начальное распределение вероятностей фаз цикла, w_i – вероятность того, что начальное состояние системы принадлежало фазе S_i , $i = [1, l]$ [4].

Ниже приведена схема алгоритма анализа и прогнозирования цикличности развития экономики с помощью аппарата теории скрытых марковских процессов (рис. 1).

Рассмотрим содержание этапов алгоритма, а также экономико-математические методы и модели, поддерживающие их реализацию.

* Работа выполнена в рамках украинско-российского научно-исследовательского проекта «Модели оценки неравномерности и цикличности динамики социально-экономического развития регионов Украины и России», который осуществляется по результатам совместного конкурса НАН Украины и РФФИ – 2010 (проект № 1-10/10-02-00716а/У).



Рис. 1. Схема алгоритма анализа и прогнозирования цикличности развития экономики с помощью аппарата теории скрытых марковских процессов

Этап 1. Анализ цикличности развития экономики.
Этап 1.1. Формирование системы показателей, отражающих цикличность развития экономической системы.

Система показателей формируется в виде $X = (x_{ij})_{T \times p}$, где x_{ij} – значение j -го показателя, отражающего цикличность развития системы в t -й период, $j = [1, p]$, $t = [1, T]$.

Этап 1.2. Классификация фаз цикла экономической системы.

Классификация заключается в разбиении исходной совокупности состояний $X = (X_1, X_2, \dots, X_t, \dots, X_T)$ экономической системы на определенное число классов $S = \{S_1, S_2, \dots, S_j\}$ таким образом, чтобы состояния, принадлежащие одному классу, находились бы на сравнительно небольших расстояниях друг от друга. Каждый класс S_i интерпретируется как фаза цикла. Для выбора оптимального разбиения необходимо достичь экстремума функционала качества разбиения $I(S)$, который определенным образом задает способ сопоставления с каждым возможным разбиением S некоторого числа

$I(S)$, оценивающего степень оптимальности данного разбиения. Таким образом, условие оптимальности разбиения имеет вид $I(S) \rightarrow \text{extr}_{S \in A}$, где A – множество

всех допустимых разбиений. Данный этап реализуется на основе использования методов кластерного анализа.

Этап 1.3. Выбор наблюдаемого показателя, включаемого в СММ.

Необходимо определить наблюдаемый показатель \hat{X}^c , значения которого будут использоваться в качестве входной информации на последующих этапах. При этом \hat{X}^c может либо принадлежать, либо не принадлежать множеству X , сформированному на этапе 1.1.

Этап 1.4. Оценка вероятностей смены фаз цикла.

На вход поступает информация о принадлежности каждого анализируемого состояния $X_t = (x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tp})$ определенной фазе из множества $S = \{S_1, S_2, \dots, S_j\}$ в форме табл. 1.

Необходимо сформировать матрицу вида $P = (p_{ij})_{l \times l}$, где p_{ij} – вероятность перехода за один шаг из i -й фазы в j -ю, $j = [1, l]$.

Таблица 1

Исходные данные

Состояние	Фаза	$h_r(S_i, S_j)$
X_1	$k_1 = S_i, i = [1, l]$	
X_2	$k_2 = S_i, i = [1, l]$	$h_2(k_1, k_2) = 1$
...	...	$h_3(k_2, k_3) = 1$
...
X_T	$k_T = S_i, i = [1, l]$	$h_T(k_{T-1}, k_T) = 1$

Матрица частот переходов из фазы в фазу имеет вид $G = (g_{ij})_{l \times l}$, где $g_{ij} = \sum_r h_r(S_i, S_j)$ – частота перехода за один шаг из i -й фазы в j -ю, $j = [1, l]$.

Тогда вероятность перехода за один шаг из i -й фазы в j -ю найдем как $p_{ij} = \frac{g_{ij}}{\sum_{j=1}^l g_{ij}}$.

Этап 1.5. Определение распределения вероятностей появления значения наблюдаемого показателя в каждой фазе цикла.

Здесь формируется распределение вероятностей появления значения наблюдаемого показателя из определенного интервала допустимых значений в каждой фазе $B = \{b_i(j)\}_{i \times M}$, где $b_i(j)$ – вероятность появления значения наблюдаемого показателя из j -го интервала при условии, что система находилась в i -й фазе цикла.

Исходная совокупность значений наблюдаемого показателя $\hat{X}^c = (X^c_1, X^c_2, \dots, X^c_T)$ разбивается на M интервалов $V = (V_1, V_2, \dots, V_M)$. Для каждой i -й фазы формируется таблица данных следующего вида (табл. 2).

Таблица 2

Исходные данные

№ п/п	Значение наблюдаемого показателя, соответствующее i -й фазе	Интервал значений
1	X_1^{ci}	$d_1(V_j) = 1, j = [1, M]$
2	X_2^{ci}	$d_2(V_j) = 1, j = [1, M]$
...
s	X_s^{ci}	$d_s(V_j) = 1, j = [1, M]$

Тогда вероятность появления значения наблюдаемого показателя из j -го интервала при условии, что система находилась в i -й фазе, найдем как

$$b_i(j) = \frac{\sum_k d_k(V_j)}{s}$$

Этап 1.6. Определение распределения вероятностей начальной фазы цикла.

Формируют вектор $w = (w_1, w_2, \dots, w_l)$, где w_i – вероятность того, что начальное состояние системы принадлежало фазе $S_i, i = [1, l]$.

Этап 1.7. Формирование СММ.

В результате реализации этапов 1.4 – 1.6 формируется скрытая марковская модель вида $\lambda = (P, B, w)$.

Этап 2. Прогнозирование цикличности развития экономики.

Этап 2.1. Прогноз значений наблюдаемого показателя.

На этом этапе осуществляется прогнозирование значений временного ряда наблюдаемого показателя с помощью стандартного набора методов и моделей [3].

Этап 2.2. Прогноз смены фаз цикла.

На основании информации о прогнозных значениях наблюдаемого показателя формируется последовательность $O = \{O_1, O_2, \dots, O_t, \dots, O_T\}$, где $O_t = V_j, j = [1, M]$. В результате реализации этапа получаем оптимальную последовательность фаз цикла Q , которая максимизирует $P(Q|O, \lambda)$. Поиск оптимальной последовательности реализуется с помощью алгоритма Витерби [4].

Таким образом, предложенный алгоритм может быть использован для анализа и прогнозирования цикличности развития экономических систем различного уровня иерархии. ■

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Кондратьев Н. Д.** Основные проблемы экономической статики и динамики: Предварительный эскиз.– М.: Наука, 1991.– 570 с.
- 2. Шумпетер Й. А.** Теория экономического развития.– М.: Мысль, 1982.– 455 с.
- 3. Поманский А. Б., Трофимов Г. Ю.** Математические модели в теориях экономического цикла.– Экономика и математические методы.– 1989.– Т. 25.– Вып. 5.– С. 825 – 840.
- 4. Рабинер Л. Р.** Скрытые марковские модели и их применение в избранных приложениях при распознавании речи: Обзор // ТИИЭР.– 1989.– Т. 77.– № 2.– С. 86 – 119.