УДК 313.42

ИНДЕКСЫ ДИВИЗИА И ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА

ВОРОНИН А. В.
кандидат технических наук
ЧЕРНЫШОВ С. И.
кандидат технических наук
Харьков

Прикладные задачи экономического анализа многопродуктивных рынков и производств могут решаться лишь в агрегированных показателях количеств и цен товаров, имеющих натуральные измерители и цены. Теоретические аспекты и методология агрегирования многомерных экономических показателей неразрывно связаны с понятием количеств (объемов) и цен потребления [1]. Индексы объемов и цен потребления определенной товарной группы служат обобщенным скалярным измерителем тенденций роста или снижения соответствующих показателей, составляющих данной группы.

При переменных структурах объемов и цен многопродуктового потребления или производства установление относительной значимости двух многомерных векторов объемов и цен для различных моментов времени – задача в общем случае нетривиальная как с позиции экономической теории, так и со стороны экономико-статистического моделирования. Значимость данной проблематики определяется хотя бы тем, что на основе такого сопоставления принимаются решения о социальных программах, тарифной политике, индексации заработных плат и экономическом регулировании в целом.

Примерно до середины прошлого столетия теория экономической динамики и теория экономических индексов развивались в основном параллельно по отношению друг к другу. Вторая формулировалась около ста лет тому назад как сугубо статистическая теория, оперирующая наборами количеств товаров и их цен без выявления каких-либо теоретически обоснованных функциональных связей. Разумеется, при этом набор товаров формируется произвольным образом. Анализ экономической действительности в ретроспективе показывает, что наиболее применяемыми в экономической статистике оказались индексы Ласпейраса и Пааше, в которых индексируемый показатель строится на основе соответственно базового или текущего набора цен или количеств потребления. Однако весьма существенно, что различные методики построения экономических индексов дают различные оценки значимых показателей, а это, в свою очередь, усложняет их использование в процедурах принятия обоснованных решений.

Серьезную попытку в решении данной проблемы предпринял видный американский статистик И. Фишер, предложивший в 1922 г. аксиоматику построения индексов [2]. Но при этом статистические индексы, вычисляемые по данным произвольно формируемых потребительских корзин, не удовлетворяют одновременно таким необходимым и естественным требованиям, как промежуточность, транзитивность и мультипликативность. Сравнительный практический анализ различных статистических индексов показывает [3], что в условиях высокой инфляции они дают неприемлемо большие расхождения.

Современник М. Фишера, российский экономист А. А. Конюс в 1924 г. издал работу [4], которая определила новое направление в теории экономических индексов. Сутью данного подхода является предложение о рациональном поведении потребителей, максимизирующих свою субъективную полезность при бюджетном ограничении. Конюс ввел «истинный» индекс стоимости жизни как отношение стоимости двух наборов товаров, обеспечивающих одинаковый уровень потребления (одинаковую полезность) при различных ценах. Некоторый скептицизм по отношению к концепции Конюса можно объяснить применением статического баланса для обоснования данной методологии.

Необходимо понимать, что теория экономических индексов не ограничивается лишь перечислением возможных и рекомендуемых для применения формул индексов, построенных с помощью наборов объемов $q_i(t)$ и цен $p_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, $t = 0,1$. Несомненный интерес представляет идея непрерывного взвешивания, предложенная французским экономистом Ф. Дивизиа [5] и послужившая толчком к появлению целого класса индексов, различающихся выбором траектории при переходе из состояния $q(0)$, $p(0)$ в состояние $q(1)$, $p(1)$.

Предметный анализ свойств индексов Дивизиа содержится в монографии П. Кевеша [6], где, в частности, утверждается, что выше названные индексы обладают рядом полезных и естественных свойств такими как транзитивность и агрегирования П. Кевеш пишет: «Индекс Дивизиа, очевидно, требует более широкой, чем прежде, постановки проблем вычисления индексов.

В действительности он тесно связан с двухситуационными формулами второй и третьей генерации из дерева индексов – как аддитивными, так и мультипликативными,– и в определенном смысле может рассматриваться как вид, объединяющих эти две ветви.

Дивизиа, а вслед за ним и многие другие авторы выступали с критикой статистического подхода к определению индекса цен, подхода, в соответствии с которым, рассчитывая индекс цен, мы стремимся найти среднее из индивидуальных индексов, распределенных по закону больших чисел. Дивизиа ссылался на то, что отдельные факторы, определяющие изменения цен, не являются малозначащими, и, более того, они не независимы. Он признавал, что, видимо, существует «центр тяжести» для изменений цен, который, по его мнению, должен идентифицироваться на основе экономически содержательного определения индекса цен».

Итак, следуя Э. Б. Ершову – автору дополнения к переводу монографии П. Кевеша [6], семейство индексов объема D_q и цен D_p Ф. Дивизиа задается формулами:

$$D_q = exp\left(\int_0^1 \frac{\sum_{i=1}^n p_i(t)dq_i(t)}{\sum_{i=1}^n q_i(t)p_i(t)}\right),\qquad D_p = exp\left(\int_0^1 \frac{\sum_{i=1}^n q_i(t)dp_i(t)}{\sum_{i=1}^n q_i(t)p_i(t)}\right), \tag{1}$$

где $\{q_i(t), p_i(t)\} \equiv \pi(t)$ – любой дифференцируемый путь, удовлетворяющий условиям $q_i(0) = q_i^0$, $p_i(0) = p_i^0$, $q_i(1) = q_i^1$, $p_i(1) = p_i^1$ и $t = 0,1$. Очевидным образом из (1) следует соотношение

$$D_q \cdot D_p = \frac{\sum_{i=1}^n q_i^1 p_i^1}{\sum_{i=1}^n q_i^0 p_i^0}. \tag{2}$$

Проблемы непосредственного вычисления значений D_q и D_p напрямую связаны с явным видом траекторий $\pi(t)$. Произвольное задание траектории $\pi(t)$ приведет к проблеме численного интегрирования выражений для D_q или D_p с соответствующими вычислительными особенностями. Только лишь для некоторых траекторий удается получить явные алгебраические выражения для D_p, D_q в замкнутой форме, зависящие от начальных и конечных значений элементов векторов объемов и цен. Далее, в указанном дополнении Э. Б. Ершов подчеркивает недопустимость выбора линейных и экспоненциальных траекторий (во времени) $\pi(t)$, т. к. полученные значения индексов трудно интерпретировать с позиций экономического анализа.

Обратимся к принципу задания модели совместной динамики объемов $q(t)$ и цен $p(t)$, обеспечивающий инвариантность индексов Дивизиа по отношению выбору пути интегрирования. Так, Рихтер и Халтен, цитируемые по монографии [6], предложили существование некоторой потенциальной функции, в основу построения которой положена непрерывная зависимость цены от объема. В результате может быть получено выражение для индекса объема D_q в виде отношения двух функций от объема в начале и конце траектории соответственно. Реализация таковопринципа потенциальности подразумевает наличие теории совместной динамика объемов и цен, отражающей реально наблюдаемые экономические балансы.

В настоящей работе предлагаются следующие допущения: 1) все пары $\{p_i(t), q_i(t)\}$ динамически независимы; 2) объем является однозначной функцией цены $q_i = F_i(p_i)$; 3) динамика цены определяется из условия – «Спрос в настоящий момент времени равен взвешенному предложению от всех прошлых моментов времени»:

$$D_i(p_i(t)) = \int_a^t K_i(t,\tau) S_i(p_i(\tau)) d\tau, \qquad (3)$$

где D_i – спрос на i-ом рынке; s_i – предложенные на i-ом рынке.

В дальнейшем изложении будут конкретизованы явные выражения для функций спроса и предложения.

Вначале используем второе допущение и выразим индекс Дивизиа D_p как функцию цены:

$$D_p = exp\left(\int_0^1 \frac{\sum_{i=1}^n F_i(p_i) dp_i(t)}{\sum_{i=1}^n F_i(t) p_i(t)} \right). \qquad (4)$$

Очевидно, что (4) является сложным математическим выражением и для различных траекторий (путей) $P_i(t)$ принимать различные значения. Попробуем найти такое выражение для $F_i(p)$, чтобы чиститель под знаком интеграла в формуле (4) был полным дифференциалом знаменателя. Иначе говоря, ищем $F_i(p)$, удовлетворяющее условию:

$$p_i \frac{dF_i(p_i)}{dp_i} = \beta F_i(p_i), \qquad (5)$$

где β – произвольная постоянная ($\beta \neq -1$).

Дифференциальное уравнение (5) имеет явное решение

$$F_i(p_i) = A_i p_i^{\beta}, \qquad (6)$$

где A_i – постоянная интегрирования, определяемая из условия

$$q_i^0 = A_i (p_i^0)^{\beta}. \qquad (7)$$

В таком случае формула (4) путем простых преобразований при водится в виду

$$D_p = \left(\frac{\sum_{i=1}^n A_i p_i^{\beta+1}(1)}{\sum_{i=1}^n A_i p_i^{\beta+1}(0)} \right)^{\frac{1}{\beta+1}}. \qquad (8)$$

Формулу (8) можно видоизменить с учетом связи $q_i(t) = A_i P_i^{\beta}(t)$, т. е.

$$D_p = \left(\frac{\sum_{i=1}^n q_i(1) p_i(1)}{\sum_{i=1}^n q_i(0) p_i(0)} \right)^{\frac{1}{\beta+1}}. \qquad (9)$$

В случае β = 1 при линейной зависимости объема от цены $q_i(t) = A_i\, p_i(t)$ получаем частный вид формулы (9):

$$D_p = \sqrt{\left(\frac{\sum_{i=1}^n q_i(1) p_i(1)}{\sum_{i=1}^n q_i(0) p_i(0)} \right)}. \qquad (10)$$

Из работы [6] известно, что индекс стоимости (в отношении 1/0) равен

$$V_{1/0} = \frac{\sum_{i=1}^n q_i(1) p_i(1)}{\sum_{i=1}^n q_i(0) p_i(0)}.$$

Следовательно, выражение (9) примет более компактную форму

$$D_p = (V_{1/0})^{\frac{1}{\beta+1}}. \qquad (11)$$

Соответственно, из равенства

$$D_q \cdot D_p = V_{1/0}$$

будем иметь

$$D_q = V_{1/0}^{\frac{\beta}{\beta+1}}. \qquad (12)$$

Из (11) и (12) очевидным образом следует, что при β = 1, т. е. линейной связи между ценой и объемом

$$D_q = D_p = \sqrt{V_{1/0}}. \qquad (13)$$

Формула (13) является частным случаем формулы А. Фогта (формула 6.7 из [6]), где рассматривались различные «заменители» индексов Дивизиа.

Возвратимся к третьему допущению о динамическом балансе «спрос-предложение» и положим функцию спроса в виде

$$D_i(p_i) = d_0^i(t) - d_1^i p_i(t),$$

а предложение будем считать равным объему, т. е.

$$q_i(t) = S_i(p_i) = A_i (p_i(t))^{\beta},$$

где $d_0^i(t)$ – положительная функция времени, коэффициент $d_1^i > 0$.

Тогда соотношение (3) примет вид нелинейного интегрального уравнения Вольтерры

$$d_1^i p_i(t) + A_i \int_0^t K_i(t,\tau)(p_i(\tau))^{\beta} d\tau = d_0^i(t). \qquad (14)$$

Интегральное уравнение (14) является базовым функциональным уравнением для определения динамики цены. Здесь имеется в виду, что решения $p_i(t)$ необходимы для определения значений $p_i(1)$, т. к. определяются из (14) при $t = 0$, т. е.

$$p_i(0) = \frac{d_0^i(0)}{d_1^i}.$$

В качестве примера рассмотрим уравнение (14) с разностным ядром в виде $K_i(t-\tau) = \mu_i e^{\mu_i(\tau - t)}$.

Далее во избежании громоздких математических конструкций индекс «i» в уравнении (14) будет опущен. Тогда имеем

$$d_1 p(t) + A\int_0^t \mu e^{\mu(\tau-t)}{}''(p(\tau))^{\beta} d\tau = d_0(t). \qquad (15)$$

Путем дифференцирования по времени t и исключения интегрального слагаемого получим следующее дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\dot{p} + \mu p + \mu A p^{\beta} = \dot{d}_o + \mu d_o. \qquad (16)$$

Если выбрать автономный спрос $d_0(t)$ как удовлетворяющий дифференциальному уравнению

$$\dot{d}_o + \mu d_o = 0,$$

то (16) будет иметь вид классического дифференциального уравнения Бернулли:

$$\dot{P} = -\mu p - \mu A P^{\beta}. \qquad (17)$$

При помощи замены дифференциальное уравнение (17) станет линейным:

$$\dot{x} = -\mu(1-\beta)(x + A). \qquad (18)$$

Решение (18) имеет вид:

$$\begin{aligned} x(t) &= (x_o + A)e^{-\mu(1-\beta)t} - A \\ x_0 &= (P(0))^{1-\beta}. \end{aligned} \qquad (19)$$

Очевидно, что динамика цены $p(t)$ выражается формулой

$$P(t) = P(0)e^{-\mu t}\left[1 + \frac{A}{P(0)^{1-\beta}}(1 - e^{\mu(1-\beta)t}\right]^{\frac{1}{1-\beta}}. \qquad (20)$$

Полагая $t = 1$ и восстанавливая индекс «i», получим

$$P_i(1) = P_i(0)e^{-\mu_i}\left[1 + \frac{A_i}{P_i(0)^{1-\beta}}(1 - e^{\mu_i(1-\beta)}\right]^{\frac{1}{1-\beta}}. \qquad (21)$$

Наличие формулы (21) позволяет иметь явное выражение для ценового индекса D_p.

Резюмируя, вполне уместно вспомнить слова П. Кевеша [6] о том, что «...идея Дивизиа дает один из возможных и эффективных путей сближения алгоритмического, статистического, экономического и аксиоматического подходов к конструированию индексов цен и объемов... ».

В заключение авторы хотели бы признать что в данном изложении не рассматривались реальные практические задачи, а основное внимание было уделено математической эстетике полученных теоретических результатов. В подобной ситуации можно вспомнить высказывание выдающегося немецкого математика Г. Вейля: «В своей работе я всегда пытался объединить истину и красоту, и когда мне приходилось выбирать одно из них, обычно я отдавал предпочтение красоте». ■

ЛИТЕРАТУРА

1. **Горбунов В. К.** Математическая теория потребительского спроса: тео-рия и прикладной потенциал.– М.: ЗАО «Издательство«Экономика», 2004.– 174 с.
2. **Аллен Р.** Экономические индексы.– М.: Статистика, 1980.
3. **Зоркальцев В. И.** Индексы цен и инфляционные процессы.– Новосибирск: Наука, 1996.
4. **Конюс А. А.** Проблема истинного индекса стоимости жизни // Экономика и математические методы.– 1989 (1924, переиздание).– Т. 25.– № 3.
5. **Липовецкий С. С.** К дальнейшему развитию индексного метода // Экономика и математические методы.– 1989.– Т. 25.– № 1.
6. **Кевеш П.** Теория индексов и практика экономического анализа.– М.: Финансы и статистика, 1990.– 303 с.