УДК 510.217

МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ СТРАТЕГИИ РЕМОНТНЫХ РАБОТ ПРОМЫШЛЕННОГО ОБОРУДОВАНИЯ

МЕДВЕДЕВА М. И.

кандидат физико-математических наук

Донецк

В современной теории управления промышленными предприятиями одной из первостепенных задач, является задача организации и контроля надежности технологического оборудования, определения оптимальной стратегии его ремонта, профилактики и переналадки. Надежность оборудования, как известно, является одним из основных показателей процесса его эксплуатации, который характеризует способность выполнять поставленные задачи в заданном режиме и условиях применения, технического обслуживания, ремонтов, хранения и транспортировки. Современная теория производства характеризуется, в частности, системным подходом к вопросам снабжения, организации производственного процесса и сбыта готовой продукции [1, 2]. Очевидно, все это тесно связано с проблемами управления профилактикой и ремонтным обслуживанием производственного оборудования.

Эффективное функционирование современного предприятия, его способность выпускать конкурентоспособную продукцию во многом определяется деятельностью его вспомогательных служб, задачей которых является обеспечение работоспособного состояния производственного оборудования с минимальными затратами. При этом возрастающая роль ремонтных служб в обеспечении эффективной работы предприятия ставит задачи формирования и развития организационно-экономического механизма управления ремонтными службами. Однако, в силу сложившихся традиций, ремонтные службы относятся к вспомогательному производству, в связи с чем им уделяется недостаточно внимания. Необходимость сосредоточиться на основном производстве часто ставит перед предприятием вопрос о выводе на аутсорсинг тех функций (ремонтных служб), которые не являются стратегически важными и легко поддаются стандартизации.

Данная работа посвящена построению и анализу вероятностной модели обслуживания производственного оборудования. В отличие от раннее исследовавшихся моделей [3, 4] здесь рассматривается система с неидентичной переналадкой, т. е. интенсивности переналадки после восстановления системы и в процессе бесперебойной работы оборудования различны. Такие модели позволяют выбрать оптимальную стратегию функционирования как основного, так и вспомогательного материального потока логистической системы, принимать решение о выводе ремонтных служб на аутсорсинг или инсорсинг.

Пусть имеется производственно-экономическая система, которая может быть описана с помощью одноканальной системы массового обслуживания разомкнутого типа с простейшим входным потоком, интенсивность которого $\lambda > 0$. Оборудование независимо друг от друга обслуживают две бригады. При этом одна бригада осуществляет переналадку оборудования, вторая – его профилактику и ремонт. Предполагается, что время обслуживания (обработки) поступившего заказа имеет показательное распределение с параметром $\mu > 0$. После обслуживания всех заказов, находящихся в системе, оборудование немедленно отключается и переходит в состояние свободен – не готов; при поступлении нового заказа оборудование проходит переналадку на выпуск новой партии, после чего начинается выполнение поступившего заказа. Длительность переналадки имеет показательный закон распределения с параметром $\nu > 0$.

Предполагается, что выход оборудования из строя может произойти только во время выполнения заказа, т. е. если оно находится в рабочем состоянии. Момент выхода из строя имеет показательный закон распределения с параметром $\chi > 0$. Если в момент выхода из строя в системе была заявка, то она теряется. После того, как было выполнено последнее требование и в системе нет новых заявок, начинается профилактика оборудования, длительность которой имеет показательный закон распределения с параметром $\psi_1 > 0$. Время ремонта или время восстановления оборудования имеет показательный закон распределения с параметром $\psi_2 > 0$. Если после восстановления оборудования, в системе нет заявок, то оно переходит в состояние свободен – не готов. Если же в системе есть заявки, то для ее выполнения требуется переналадка, интенсивность которой υ_1. Следовательно, рассматривается система с неидентичной переналадкой.

Случайный процесс поступления заявок и их обслуживание может быть описан следующими возможными состояниями:

$(0, k)$ – прибор вышел из строя и восстанавливается, в системе $k \geq 0$ требований;

$(1, 0)$ – прибор свободен – не готов;

$(1, k)$ – прибор работает и в системе $k \geq 1$ требований;

$(0^*, k)$ – проводится переналадка оборудования и в системе $k \geq 1$ требований;

$(2, 0^*, k)$ – проводится профилактика и переналадка оборудования и в системе $k \geq 1$ требований;

$(2, k)$ – проводится профилактика и в системе $k \geq 0$ требований:

$(0, 0^*, k)$ – проводится переналадка оборудования после его ремонта и в системе $k \geq 1$ требований.

Граф состояний описанной системы имеет вид (*рис. 1*).

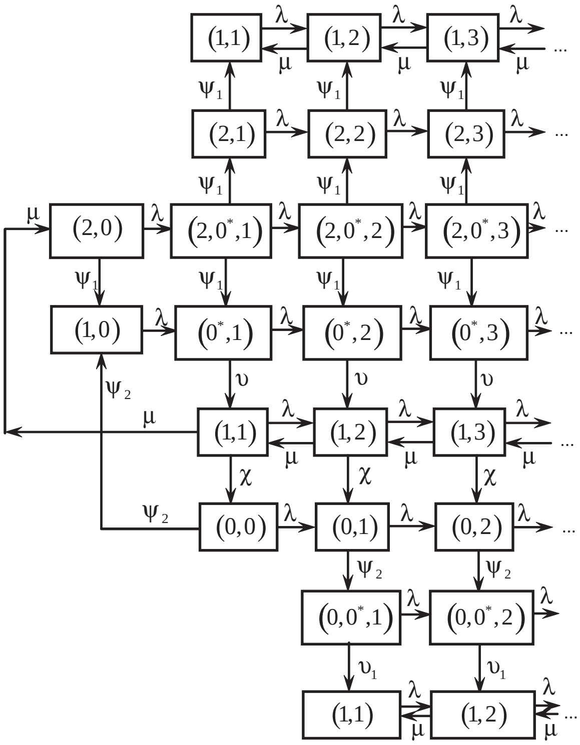

Рис. 1. Граф состояний системы массового обслуживания с ненадежным оборудованием

Найдем основные характеристики рассматриваемой системы – распределения совместных вероятностей того, что оборудование находится в определенном состоянии (переналадка, профилактика, восстановление или работа) и в системе имеется определенное количество требований. Для этого рассмотрим стационарный случайный процесс $\xi(t)$, описывающий состояние системы в момент времени t. Его фазовое пространство имеет вид:

$$E=\left\{\begin{matrix}(0,\,k),\,(1,\,k),\,(2,\,k),\,k\ge 0;\,(0^*,\,l),\,(2,\,0^*,\,l),\,l\ge 1;\\(0,\,0^*,\,m),\,m\ge 1\end{matrix}\right\}.$$

Рассмотрим стационарные вероятности состояний процесса $\xi(t)$:

$$P_{ik}=\mathrm{P}\{\xi(t)=(i,\,k)\},\ i=0,\,1,\,2;\ k\ge 0,$$

$$P_{0^*k}=\mathrm{P}\{\xi(t)=(0^*,\,k)\},\ k\ge 1,$$

$$P_{2,0^*k}=\mathrm{P}\{\xi(t)=(2,0^*,\,k)\},\ k\ge 1,$$

$$P_{0,0^*k}=\mathrm{P}\{\xi(t)=(0,0^*,\,k)\},\ k\ge 1.$$

С помощью графа состояний процесса $\xi(t)$ составляем системы однородных бесконечных алгебраических уравнений для вероятностей P_{ik}, $i=0,\,1,\,2;\ k\ge 0$, P_{0^*k}, $k\ge 1$, $P_{2,0^*k}$, $k\ge 1$, $P_{0,0^*k}$, $k\ge 1$:

$$\begin{cases}-(\lambda+\upsilon)P_{0^*1}+\lambda P_{10}+\psi_1 P_{20^*k}=0,\\-(\lambda+\upsilon)P_{0^*k}+\lambda P_{0^*,k-1}+\psi_1 P_{20^*k}=0,\ \ k>1;\end{cases}\qquad(1)$$

$$\begin{cases}-(\lambda+\psi_2)P_{0,0}+\chi P_{11}=0,\\-(\lambda+\psi_2)P_{0k}+\lambda P_{0,k-1}+\chi P_{1,k+1}=0,\ k\ge 1;\end{cases}\qquad(2)$$

$$\begin{cases}-\lambda P_{10}+\psi_1 P_{20}+\psi_2 P_{00}=0,\\-(\lambda+\mu+\chi)P_{11}+\upsilon P_{0^*1}+\mu P_{12}+\\+\psi_1 P_{21}+\upsilon_1 P_{0^*01}=0,\\-(\lambda+\mu+\chi)P_{1k}+\lambda P_{1,k-1}+\upsilon P_{0^*k}+\\+\mu P_{1,k+1}+\psi_1 P_{2k}+\upsilon_1 P_{0^*0k}=0,\ k\ge 2;\end{cases}\qquad(3)$$

$$\begin{cases}-(\lambda+\psi_1)P_{20}+\mu P_{11}=0,\\-(\lambda+\psi_1)P_{21}+\upsilon P_{20^*1}=0,\\-(\lambda+\psi_1)P_{2k}+\upsilon P_{20^*k}+\lambda P_{2,k-1}=0,\ k\ge 2;\end{cases}\qquad(4)$$

$$\begin{cases}-(\lambda+\upsilon+\psi_1)P_{20^*1}+\lambda P_{20}=0,\\-(\lambda+\upsilon+\psi_1)P_{20^*k}+\lambda P_{20^*,k-1}=0,\ k\ge 2;\end{cases}\qquad(5)$$

$$\begin{cases}-(\lambda+\upsilon_1)P_{00^*1}+\psi_2 P_{01}=0,\\-(\lambda+\upsilon_1)P_{00^*k}+\lambda P_{00^*,k-1}+\psi_2 P_{0k}=0,\ k\ge 2.\end{cases}\qquad(6)$$

Для решения систем уравнений (1) – (6) введем в рассмотрение производящие функции вида:

$$a_0(z)=\sum_{k\ge 0}P_{0k}z^k,\ a_0^*(z)=\sum_{k\ge 1}P_{0^*k}z^k,\ a_1(z)=\sum_{k\ge 0}P_{1k}z^k,$$

$$a_2(z)=\sum_{k\ge 0}P_{2k}z^k,\ a_1^*(z)=\sum_{k\ge 1}P_{00^*k}z^k,\ a_2^*(z)=\sum_{k\ge 1}P_{20^*k}z^k,$$

а также параметры

$$\rho=\frac{\lambda}{\mu},\ \delta=\frac{\upsilon}{\mu},\ \delta_1=\frac{\upsilon_1}{\mu},\ \beta_1=\frac{\psi_1}{\mu},\ \beta_2=\frac{\psi_2}{\mu},\ \gamma=\frac{\chi}{\mu}.$$

Умножив уравнения системы (1) на z, z^k, $k>1$, суммируем их по k. Тогда после несложных преобразований, с учетом введенных обозначений, получаем уравнение

$$(\rho+\delta-\rho z)\,a_0^*(z)-\beta_1 a_2^*(z)=\rho\, z\, P_{10}.\qquad(7)$$

Аналогично из систем бесконечных линейных уравнений (2) – (6) соответственно получаем

$$z(\rho+\beta_2-\rho\, z)\,a_0(z)-\gamma\, a_1(z)=-\gamma P_{10},\qquad(7а)$$

$$z(\rho+\beta_2-\rho z)\,a_0(z)-\gamma a_1(z)=-\gamma P_{10},\qquad(8)$$

$$\begin{aligned}&(\rho z^2-z(1+\rho+\gamma)+1)\,a_1(z)+\delta z a_0^*(z)+\\&+\beta_1 z a_2(z)+\delta_1 z a_1^*(z)=\\&=(\rho z^2-z(1+\gamma)+1)P_{10}+zP_{11}-\beta_2 z\,P_{00},\end{aligned}\qquad(9)$$

$$(\rho z-\rho-\beta_1)\,a_2(z)+\delta a_2^*(z)=\rho z P_{20}-P_{11},\qquad(10)$$

$$(\rho+\delta+\beta_1-\rho z)\,a_2^*(z)=\rho\, z\, P_{20},\qquad(11)$$

$$(\rho z-\rho-\delta_1)\,a_1^*(z)+\beta_2 a_0(z)=\beta_2 P_{00}.\qquad(12)$$

Выразим неизвестные вероятности P_{00}, P_{11} и P_{20} через P_{10}. Для этого составим систему из первых уравнений систем (2), (3) и (4), предварительно проведя несложные преобразования. Получаем следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}-(\rho+\beta_2)P_{00}+\gamma P_{11}=0,\\-\rho P_{10}+\beta_1 P_{20}+\beta_2 P_{00}=0,\\-(\rho+\beta_1)P_{20}+P_{11}=0.\end{cases}\qquad(13)$$

Обозначим

$$C=\frac{\rho}{\beta_1(\rho+\beta_2)+\gamma\beta_2(\rho+\beta_1)}.$$

Тогда несложно показать, что решение системы алгебраических уравнений (13) относительно P_{10} имеет вид:

$$\begin{cases} P_{11}=C(\rho+\beta_1)(\rho+\beta_2)P_{10}, & (14)\\ P_{00}=\gamma C(\rho+\beta_1)P_{10}, & (15)\\ P_{20}=C(\rho+\beta_2)P_{10}. & (16)\end{cases}$$

Подставив найденные значения вероятностей , и в соотношения (7), (9) – (12), соответственно получаем

$$(\rho+\delta-\rho z)\,a_0^*(z)-\beta_1 a_2^*(z)=\rho z\,P_{10}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned}&(\rho z^2-z(1+\rho+\gamma)+1)\,a_1(z)+\delta z a_0^*(z)+\beta_1 z a_2(z)+\\&+\delta_1 z a_1^*(z)= \qquad (18)\\&=[\rho z^2-z(1+\gamma)+1+Cz(\rho+\beta_1)\cdot(\rho+\beta_2-\gamma\beta_2)]P_{10},\end{aligned}$$

$$(\rho z-\rho-\beta_1)\,a_2(z)=C(\rho+\beta_2)(\rho z-\rho-\beta_1)P_{10}-\delta a_2^*(z), \quad (19)$$

$$(\rho+\delta+\beta_1-\rho z)\,a_2^*(z)=C\rho z(\rho+\beta_2)P_{10}, \quad (20)$$

$$(\rho z-\rho-\delta_1)\,a_2^*(z)+\beta_2 a_0(z)=C\gamma\beta_2(\rho+\beta_1)\,P_{10}. \quad (21)$$

Для простоты изложения, введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}&d_1(z)=z(\rho+\beta_2-\rho z),\\&d_2(z)=\rho z^2-z(1+\rho+\gamma)+1,\\&d_3(z)=\rho+\delta-\rho z,\\&d_4(z)=\beta_1 a_2^*(z)+\rho z\,P_{10},\\&d_5(z)=\begin{bmatrix}\rho z^2-z(1+\gamma)+1+\\+Cz(\rho+\beta_1)(\rho+\beta_2-\gamma\beta_2)\end{bmatrix}P_{10}-\beta_1 z a_2(z),\\&d_6(z)=\rho z-\rho-\delta_1.\end{aligned}$$

Из равенств (8), (17), (18) и (21) составляем новую систему алгебраических уравнений, которая, с учетом введенных обозначений, имеет вид:

$$\begin{cases} d_1(z)\,a_0(z)-\gamma a_1(z)=-\gamma P_{10},\\ d_2(z)a_1(z)+\delta z a_0^*(z)+\delta_1 z a_1^*(z)=d_5(z),\\ d_3(z)a_0^*(z)-\beta_2 a_0(z)=d_4(z),\\ d_6(z)a_1^*(z)+\beta_2 a_0(z)=C_1,\end{cases} \quad (22)$$

где $C_1=C\gamma\beta_2(\rho+\beta_1)P_{10}$.

Решая систему алгебраических уравнений (22) относительно стационарной вероятности P_{10}, можно выразить производящие функции $a_0(z)$, $a^*_0(z)$ и $a_1(z)$ через P_{10}.

Для определения P_{10}, а затем и вероятностей P_{11}, P_{00} и P_{20} воспользуемся условием нормировки

$$a_0(1)+a_0^*(1)+a_1(1)+a_1^*(1)+a_2(1)+a_2^*(1)=1.$$

Значения производящих функций $a_2(z)$ и $a^*_2(z)$ в точке $z = 1$ находим непосредственно из равенств (19) и (20). В частности из равенства (20) находим

$$a_2^*(1)=\frac{C\rho(\rho+\beta_2)}{\delta+\beta_1}P_{10}. \quad (23)$$

Из равенств (19) и (23) следует, что

$$a_2(1)=C(\rho+\beta_2)\left(1+\frac{\delta\rho}{\beta_1(\delta+\beta_1)}\right)P_{10}. \quad (24)$$

Теперь из первого уравнения системы (22) при $z = 1$ получаем следующее соотношение

$$a_1(1)=P_{10}+\frac{\beta_2}{\gamma}a_0(1). \quad (25)$$

Из третьего уравнения системы (22) при $z = 1$ получаем соотношение вида:

$$a_0^*(1)=\frac{d_4(1)}{\delta}. \quad (26)$$

Наконец, из четвертого уравнения системы (22) при $z = 1$ следует справедливость равенства

$$a_1^*(1)=\frac{1}{\delta_1}(\beta_2\,a_0(1)-A). \quad (27)$$

Подставив соотношения (26) и (27) в условие нормировки, после несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned}&P_{10}+\frac{d_4(1)}{\delta}-\frac{A}{\delta_1}+\left(1+\frac{\beta_2}{\gamma}+\frac{\beta_2}{\delta_1}\right)a_0(1)+ \qquad (28)\\&+a_2(1)+a_2^*(1)=1.\end{aligned}$$

Таким образом, для вычисления стационарной вероятности P_{10} достаточно найти значение производящей функции.

Из системы (22) находим:

$$a_0(z)=\gamma\frac{\begin{aligned}&d_6(z)[d_3(z)d_5(z)-d_2(z)d_3(z)P_{10}-\\&-\mathrm{d}\,z d_4(z)d_6]-\mathrm{d}_1 z d_3(z)A(z)\end{aligned}}{d_3(z)[d_1(z)d_2(z)d_6(z)-\gamma\beta_2\mathrm{d}_1 z]}.$$

Тогда можно показать справедливость следующего равенства

$$a_0(1)=\frac{\delta_1\rho\gamma\left[P_{10}+\dfrac{d_4(1)}{\delta}+a_2^*(1)+a_2(1)-\dfrac{A}{\delta_1}\right]}{\beta_2\delta_1(1+\gamma)-\rho(\gamma\delta_1+\beta_2(\delta_1+\gamma))}. \quad (29)$$

Из равенства (29) находим условие существования стационарных вероятностей состояний системы, а именно

$$\rho<\frac{\beta_2\delta_1(1+\gamma)}{\gamma\delta_1+\beta_2(\delta_1+\gamma)}. \quad (30)$$

Наконец, используя равенства (28) и (29), выписываем условие нормировки:

$$\begin{aligned}&\left[P_{10}+\frac{d_4(1)}{\delta}-\frac{A}{\delta_1}+a_2(1)+a_2^*(1)\right]\times\\&\times\left[1+\frac{[\gamma\delta_1+\beta_2(\delta+\gamma)]\rho\delta}{\beta_2\delta_1(1+\gamma)-\rho(\gamma\delta_1+\beta_2(\delta_1+\gamma))}\right]=1.\end{aligned}$$

Подставив в последнее равенство найденные выше значения производящих функций $a_2(1)$ и $a^*_2(1)$, находим

$$P_{10}=\frac{1}{B(1+K)},$$

ЕКОНОМІКА ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ где

$$B=\frac{1}{\delta\delta_1\beta_1(\delta+\beta_1)}\left[\beta_1(\delta+\beta_1)\begin{pmatrix}\delta_1(\delta+\rho)+C\delta\delta_1(\rho+\beta_2)-\\-C\gamma\delta\beta_2(\rho+\beta_1)\end{pmatrix}+\right.$$
$$\left.+C\rho\delta(\rho+\beta_2)(\delta^2+\beta_1^2+\beta_1\delta)\right].$$

и $K=\dfrac{[\gamma\delta_1+\beta_2(\delta+\gamma)]\delta\rho}{\beta_2\delta(1+\gamma)-\rho(\gamma\delta+\beta_2(\delta+\gamma))}.$

Таким образом, найдены производящие функции вероятностей состояний системы и необходимое условие (30) существования стационарного распределения вероятностей состояний рассмотренной системы. С помощью найденных вероятностей можно рассчитать различные показатели, которые характеризуют процесс функционирование рассмотренной системы, а также оценить целесообразность вывода ремонтных услуг на аутсорсинг. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Друкер П. Создание новой теории производства / П. Друкер // Проблемы теории и практики управления. – 1991. – № 1. – С. 5 – 11.

2. Промышленная логистика. Логистико-ориентированное управление организационно-экономической устойчивостью промышленных предприятий в рыночной среде / И. Н. Омельченко, А. А. Колобов, А. Ю. Ермаков, А. В. Киреев ; Под ред. А. А. Колобова. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1997. – 204 с.

3. Медведева М. И. Исследование системы обслуживания с ненадежным прибором и переналадкой в начале периода занятости / Н. В. Румянцев, М. И. Медведева // Бізнес Інформ. – Харьков, 2011. – № 7(1). – С. 10 – 13.

4. Медведева М. И. Гибкая производственная система с переналадкой, ненадежным оборудованием, восстановлением и профилактикой / М. И. Медведева // Проблеми економіки. – Харків, 2012. – № 2. – С. 54 – 58.