УДК 336.71

ОБЧИСЛЕННЯ ЦІН ОПЦІОНІВ МЕТОДАМИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛІЗУ

БУРТНЯК І. В., МАЛИЦЬКА Г. П.

УДК 336.71

Буртняк І. В., Малицька Г. П. Обчислення цін опціонів методами спектрального аналізу

У статті розроблено систематичний метод обчислення наближеної ціни для широкого класу цінних паперів за допомогою інструментів спектрального аналізу, сингулярної та регулярної хвильової теорії. Ціна опціонів залежить від стохастичної волатильності, яка описується шляхозалежним процесом. Знаходження ціни зводиться до розв'язання проблеми знаходження власних значень і власних функцій певного рівняння.

Ключові слова: *стохастична волатильність, локальна волатильність, спектральна теорія, сингулярна хвильова теорія, регулярна хвильова теорія.*

Рис.: *1.* ***Формул:*** *46.* ***Бібл.:*** *3.*

Буртняк Іван Володимирович *– кандидат економічних наук, доцент, кафедра економічної кібернетики, Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника (вул. Шевченка, 57, Івано-Франківськ, 76018, Україна)*

Малицька Ганна Петрівна *– кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра математичного та функціонального аналізу, Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника (вул. Шевченка, 57, Івано-Франківськ, 76018, Україна)*

УДК 336.71

Буртняк И. В., Малицкая А. П. Вычисление цен опционов методами спектрального анализа

В статье разработан систематический метод вычисления приближенной цены для широкого класса ценных бумаг с помощью инструментов спектрального анализа, сингулярной и регулярной волновой теории. Цена опционов зависит от стохастической волатильности, зависимой от пути. Нахождение цены сводится к решению проблемы нахождения собственных значений и собственных функций определенного уравнения.

Ключевые слова: *стохастическая волатильность, локальная волатильность, спектральная теория, сингулярная волновая теория, регулярная волновая теория.*

Рис.: *1.* ***Формул:*** *46.* ***Библ.:*** *3.*

Буртняк Иван Владимирович *– кандидат экономических наук, доцент, кафедра экономической кибернетики, Прикарпатский национальный университет им. В. Стефаника (ул. Шевченко, 57, Ивано-Франковск, 76018, Украина)*

Малицкая Анна Петровна *– кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического и функционального анализа, Прикарпатский национальный университет им. В. Стефаника (ул. Шевченко, 57, Ивано-Франковск, 76018, Украина)*

UDC 336.71

Burtnyak I. V., Malitskaya A. P. Calculation of Option Prices Using Methods of Spectral Analysis

The article develops a systematic method of calculation of an approximate price for a wide range of securities with the help of instruments of spectral analysis, singular and regular wave theory. Price of options depend on stochastic volatility, which depends on a method. Finding the price is reduced to solution of a problem of finding own values and own functions of a specific equation.

Key words: *stochastic volatility, local volatility, spectral theory, singular wave theory, regular wave theory.*

Pic.: *1.* ***Formulae:*** *46.* ***Bibl.:*** *3.*

Burtnyak Ivan V. *– Candidate of Sciences (Economics), Associate Professor, Department of Economic Cybernetics, Precarpathian National University named after V. Stefanyk (vul. Shevchenka, 57, Ivano-Frankivsk, 76018, Ukraine)*

Malitskaya Anna P. *– Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Mathematical and Functional Analysis, Precarpathian National University named after V. Stefanyk (vul. Shevchenka, 57, Ivano-Frankivsk, 76018, Ukraine)*

Спектральна теорія стала важливим інструментом для аналізу дифузії, а саме, у дослідженні розвинень за власними функціями лінійних операторів. Для фінансових моделей дифузії є основним процесом, тому не дивно, що методи спектральної теорії зробили свій внесок у фінансову математику. Зокрема, багато проблем, пов'язаних з оцінкою похідних активів, були вирішені аналітично за допомогою методів спектральної теорії. Спектральний метод застосовувався до похідних ціноутворення таким чином: використання цін, нейтральних до ризику, відбувається через представлення ціни похідної активу $u(t, x)$ нейтральною до ризику очікування деякої функції від майбутньої вартості основного процесу X. Математично це виражається як

$$u(t,x) \;=\; \tilde{E}_x\;[H(X_t)] \;=\int H(y)p(t,x,y)\,dy, \quad (1)$$

де $p(t, x, y)$ – щільність переходу X по P. Якщо інфінітезимальний (нескінченно малий) генератор L базового процесу самоспряжений на гільбертовому просторі з приростом міри $m(x)dx$, і спектр L є дискретним, то щільність переходу X має розвинення за власними функціями:

$$p(t,x,y)=m(y)\;\sum\nolimits_{n^{-\lambda nt}}\varphi_n(y)\varphi_n(x), \quad (2)$$

де $\{\lambda_n\}$ – власні значення $(-L)$ і $\{\varphi_n\}$ – власні функції: тобто $-L\varphi_n = \lambda_n\,\varphi_n$.

Значення ціни похідної активу може бути виражена аналітично шляхом підстановки (2) в (1):

$$u(t,x)=\sum c_n e^{-\lambda nt}-\varphi_n(x),$$

$$c_n=(\varphi_n,H):=\int H(y)\varphi_n(y)m(y)\,dy.$$

Розглянемо інфінітезимальний генератор загальної одномірної дифузії:

$$L=\;\frac{1}{2}a^2(x)\;\partial^2_{xx}+b(x)\partial_x-k(x),\;\;x\in(e_1,e_2), \quad (3)$$

з областю визначення $dom(L)$, який завжди самоспряжений в гільбертовому просторі $H = L^2\,(I, m)$, де $I \in R$, $I = (e_1, e_2)$ та m – швидкість щільності дифузії:

$$m(x):=\frac{2}{a^2(x)}exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{2b(y)}{a^2(y)}dy\right).$$

Нижня межа інтегрування $x_0 \in I$ є довільною. Таким чином, при одномірній дифузії для опису основної динаміки, спектральний метод служить потужним інструментом для аналітичного ціноутворення.

Одномірні дифузії широко застосовуються в фінансах, але існують випадки, у яких одномірні дифузії не є адекватними для опису динаміки базового активу. Це стосується, наприклад, досліджень стохастичної волатильності, зокрема волатильності активу, що лежить в основі похідної та контролюється нелокальною дифузією, але інфінітезимальний генератор багатовимірної дифузії буде самоспряженим тільки, коли вектор зсуву задовольняє певні обмеження, пов'язані з волатильністю кореляційної матриці.

Комбінуючи методи з теорії сингулярних збурень і спектральної теорії, можна наближено обчислити ціну вибору, як розвинення за власними функціями, хоч працюватимемо з інфінітезимальними не самоспряженими генераторами двовимірної дифузії.

Спочатку розглянемо загальну одномірну дифузію $dX_t = \nu(X_t)\,dt + a(X_t)\,dW_t$, в якої є можливість проявляти кіллінг (стрибок дефолту) на швидкості $h(X_t) \geq 0$, W_t – геометричний броунівський рух(ГБР), X завжди строго додатній. До загальної дифузії ми додаємо два фактори нелокальної волатильності: $a(X_t) \to a(X_t)\,f(Y_t, Z_t)$. Перший фактор Y – це фактор швидко мінливих чинників. Другий фактор Z змінюється повільно. Таким чином, наша модель є багатовимірною стохастичною волатильною моделлю.

Нехай (Ω, F, P) ймовірнісний простір, який підтримує корельований броунівський рух (W^x, W^y, W^z) і експоненціальна випадкова змінна $\varepsilon \sim Exp(1)$, яка не залежить від (W^x, W^y, W^z). Будемо вважати, що економіка з трьома факторами, описана однорідним часом, неперервним процесом Маркова $\chi = (X, Y, Z)$, який приймає значення в деякому просторі станів $E = I \times R \times R$, $I = (e_1, e_2)$, $-\infty \leq e_1 < e_2 \leq \infty$. Припустимо, що χ починається в E і миттєво зникає, як тільки $X \in I$, тобто:

$$X_t = \begin{cases} (X_t, Y_t, Z_t), & \tau_I > t \\ \Delta & \tau_I > t \end{cases}, \quad \tau_I = inf(t > 0 : X_t \notin I),$$

де (X, Y, Z) задаються

$$\begin{cases} dX_t = \nu(X_t)\,dt + a(X_t)\,f(Y_t, Z_t)\,dW_t^x, \\ dY_t = \dfrac{1}{\in}\alpha(Y_t)\,dt + \dfrac{1}{\sqrt{\in}}\beta(Y_t)\,dW_t^y, \\ dZ_t = \delta c(Z_t)\,dt + \sqrt{\delta} g(Z_t)\,dW_t^z, \\ d(W^x, W^y)_t = \rho_{xy} dt, \\ d(W^x, W^z)_t = \rho_{xz} dt, \\ d(W^y, W^z)_t = \rho_{yz} dt, \\ (X_0, Y_0, Z_0) = (x, y, z) \in E. \end{cases} \qquad (4)$$

$|\rho_{xy}|$, $|\rho_{xz}|$, $|\rho_{yz}| \leq 1$ та $1 + 2\rho_{xy}\,\rho_{xz}\,\rho_{yz} - \rho_{xy}^2 - \rho_{xz}^2 - \rho_{yz}^2 \geq 0$ так, щоб матриця кореляції броунівського руху була додатно визначена.

Генератори Y та Z мають вигляд

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_Y^{\epsilon} &= \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{1}{2}\beta^2(y)\partial_{yy}^2 + \alpha(y)\partial_y\right), \\ \mathfrak{L}_Z^{\delta} &= \delta\left(\frac{1}{2}g^2(z)\partial_{zz}^2 + c(z)\partial_z\right), \end{aligned} \qquad (5)$$

узгоджені з факторами $\dfrac{1}{\in}$ та δ відповідно. Таким чином, Y та Z мають внутрішню шкалу часу $\in\ > 0$ і $\dfrac{1}{\delta} > 0$. Відмітимо, що $\mathfrak{L}_Y^{\epsilon}$ і $\mathfrak{L}_Z^{\delta}$ мають вигляд (3) з $k(x) = 0$ для всіх $x \in I$. Нас цікавить оцінка похідного активу, з виплатою в час $t > 0$, яка залежить від траєкторії X. Зокрема, ми розглянемо форми виплати:

$$H(X_t)\,II_{(\tau > t)}, \qquad (6)$$

де τ – випадковий час, несплати похідного активу, визначимо динаміку (X, Y, Z) за оцінкою міри з нейтральним ризиком, яку ми позначимо, як $\widetilde{\mathbb{P}}$:

$$\begin{cases} dX_t = \big(b(X_t) - a(X_t)f(Y_t, Z_t)\Omega(Y_t, Z_t)\big)dt + \\ \ + a(X_t)f(Y_t, Z_t)d\widetilde{W}_t^x, \\ dY_t = \left(\dfrac{1}{\epsilon}\alpha(Y_t) - \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon}}\beta(Y_t)\Lambda(Y_t, Z_t)\right)dt + \\ + \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon}}\beta(Y_t)d\widetilde{W}_t^y, \\ dZ_t = \big(\delta c(Z_t) - \sqrt{\delta}g(Z_t)\Gamma(Y_t, Z_t)\big)\,dt + \\ \ + \sqrt{\delta}g(Z_t)d\widetilde{W}_t^z, \\ d\langle\widetilde{W}^x, \widetilde{W}^y\rangle_t = \rho_{xy}dt, \\ d\langle\widetilde{W}^x, \widetilde{W}^z\rangle_t = \rho_{xz}dt, \\ d\langle\widetilde{W}^y, \widetilde{W}^z\rangle_t = \rho_{yz}dt, \\ (X_0, Y_0, Z_0) = (x, y, z) \in E, \end{cases} \qquad (7)$$

де

$$d\tilde{W}_t^x := dW_t^x + \left(\frac{\nu(X_t) - b(X_t)}{a(X_t)\,f(Y_t, Z_t)} + \Omega(Y_t, Z_t)\right)dt,$$

$$d\tilde{W}_t^y := dW_t^y + \Lambda(Y_t, Z_t)\,dt,\ d\tilde{W}_t^z := dW_t^z + \Gamma(Y_t, Z_t)\,dt.$$

Припустимо, що (7) має єдиний сильний розв'язок, τ – час похідного активу, дефолт може відбутися одним із двох способів: X виходить за інтервал I, або у випадковий час τ_h, яким управляє рівень небезпеки $h(X_t) \geq 0$. Математично ми виражаємо час дефолту τ таким чином:

$$\begin{cases} \tau = \tau_I \wedge \tau_h, \\ \tau_I = inf\{t \geq 0 : X_t \in I\}, \\ \tau_h = inf\{t \geq 0 : \int_0^t (X_s)\,ds \geq \varepsilon\},\ \varepsilon \sim Exp(1),\ \varepsilon(X, Y, Z). \end{cases} \qquad (8)$$

Припустимо, що наша економіка включає надійний актив, який росте миттєво на короткий рівень $r(X_t) \geq 0$. Таким чином, якщо наша економіка включає, наприклад, «не платити дивіденди» і виносить на обговорення неплатіжний актив S, ціновий процес, який описується: $S_t = \mathrm{II}\{t \geq \tau_h\}\,X_t$, де простір станів X на $I = (0, \infty)$, тоді ціна активу має вигляд: $\{e^{-\int_0^t r(X_s)\,ds} S_t,\ t \geq 0\}$, $(\widetilde{\mathbb{P}}, \mathbb{G})$ – повинен бути мартингальним, $\mathbb{G}$ – розширена фільтрація процесу. $b(X_t) = [r(X_t) + h(X_t)]\,X_t$ і $\Omega(Y_t, Z_t) = 0$ у (7). З іншого боку, якщо X тільки описує надійний відсоток через $r(X_t)$, то зміна ймовірнісної міри $\mathbb{P}$ на $\widetilde{\mathbb{P}}$ не має причини змінити дрейф від X до $\nu(X_t)$ до $b(X_t)$. Однак, якщо є ефект включення ринкової ціни ризику, то в цьому випадку можливе $b(X_t) = v(X_t)$, і $\Omega(Y_t, Z_t) \neq 0$ в (7).

Оцінимо похідний актив деякого виграшу, який має вигляд (6), де час дефолту виражається формулою (8). Використовуючи нейтральний ризик ціноутворення і властивість Маркова X, ціна $u^{\varepsilon,\delta}(t, x, y, z)$ деяких похідних активів при $t = 0$ має вигляд:

$$u^{\epsilon,\delta}(t,x,y,z) = \widetilde{\mathbb{E}}_{x,y,z}\left[exp\left(-\int_0^t r(X_s)ds\right)H(X_t\mathbb{I}_{\{t>\tau\}})\right],$$

де $(x, y, z) \in E$ – вихідна точка процесу (X, Y, Z), $u^{\varepsilon,\delta}(t, x, y, z)$ задовольняє такій задачі Коші:

$$u^{\epsilon,\delta} = 0,\ (x,y,z) \in E, t \in \mathbb{R}^+, \tag{9}$$

$$u^{\epsilon,\delta}(0,x,y,z) = H(x), \tag{10}$$

де оператор $\mathfrak{L}^{\epsilon,\delta}$ має вигляд:

$$\mathfrak{L}^{\epsilon,\delta} = \frac{1}{\epsilon}\mathfrak{L}_0 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2 + \sqrt{\frac{\delta}{\epsilon}}\mathfrak{M}_3 + \sqrt{\delta}\mathfrak{M}_1 + \delta\mathfrak{M}_2, \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{L}_0 = \frac{1}{2}\beta^2(y)\partial_{yy}^2 + \alpha(y)\partial_y,\\
&\mathfrak{L}_1 = \beta(y)(\rho_{xy}a(x)f(y,z)\partial_x - \Lambda(y,z))\partial_y,\\
&\mathfrak{L}_2 = \frac{1}{2}a^2(x)f^2(y,z)\partial_{xx}^2 + (b(x)\\
&- a(x)\Omega(y,z)f(y,z))\partial_x - k(x),\\
&\mathfrak{M}_3 = \rho_{xz}\beta(y)g(z)\partial_{yz}^2,\\
&\mathfrak{M}_1 = g(z)\big(\rho_{xz}a(x)f(y,z)\partial_x - \Gamma(y,z)\big)\partial_z,\\
&\mathfrak{M}_2 = \frac{1}{2}g^2(z)\partial_{zz}^2 + c(z)\partial_z,\ k(x) = r(x) + h(x).
\end{aligned} \tag{12}$$

Крім початкової умови (10) функція $u^{\varepsilon,\delta}(t, x, y, z)$ повинна задовольняти на кінцях інтервалу I додаткові крайові умови. З рівняння (5) ми бачимо, що $\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{L}_Y^1$. Вважаємо, що дифузія з генератором $\mathfrak{L}_Y^1$ має інваріантний розподіл з щільністю π, оператор $\mathfrak{L}_0$ з $dom(\mathfrak{L}_0) = L^2(\mathbb{R},\pi)$ є самоспряженим в Гільбертовому просторі $L^2(\mathbb{R},\pi)$.

Розв'яжемо задачу Коші (9) – (10). Для сукупності $(f, \alpha, \beta, \Lambda, c, g, \Gamma)$ не існує ніякого аналітичного розв'язку. Однак для фіксованого δ умови (11), які містять ∈, відхиляються в як завгодно малому ∈-околі, що призводить до сингулярних збурень. Тим часом, для фіксованого ∈ умови, які містять δ, є малими для деякого малого δ-околу, що призводить до регулярних збурень. Таким чином, ∈-окіл і δ-окіл дають початок об'єднаному сингулярно-регулярному збуренню $O(1)$ оператора $\mathfrak{L}_2$. Це говорить про те, що ми шукаємо асимптотичний розв'язок задачі Коші (9) – (10). Для цього ми розкладемо $u^{\varepsilon,\delta}$ по степенях √∈ та √δ таким чином:

$$u^{\epsilon,\delta} = \sum_{j\geq 0}\sum_{i\geq 0}\sqrt{\epsilon}^i\sqrt{\delta}^j u_{i,j}\,.$$

Тому наближення цін має вигляд

$$u^{\epsilon,\delta} \approx u_{0,0} + \sqrt{\epsilon}u_{1,0} + \sqrt{\delta}u_{0,1}.$$

Розглянемо регулярний розклад збурень, які породжені δ, а потім здійснимо сингулярний аналіз збурень, які стосуються ∈.

Регулярне розвинення збурень для $\mathfrak{L}^{\epsilon,\delta}$ і $u^{\varepsilon,\delta}$, що стосується √δ:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{L}^{\epsilon,\delta} = \mathfrak{L}^{\epsilon} + \sqrt{\delta}\mathfrak{M}^{\epsilon} + \delta\mathfrak{M}_2,\\
&u^{\epsilon,\delta} = \sum_{o\geq 0}\left(\sqrt{\delta}\right)^{o} u_j^{\epsilon},
\end{aligned} \tag{13}$$

де

$$\mathfrak{L}^{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon}\mathfrak{L}_0 + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2,\ \ \mathfrak{M}^{\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\mathfrak{M}_3 + \mathfrak{M}_1. \tag{14}$$

$$u_j^{\epsilon} = \sum_{i\geq 0}\left(\sqrt{\epsilon}\right)^i u_{i,j}, \tag{15}$$

Підставивши розклад (13) в (9) і збираючи члени з степенями √δ, ми отримали рівняння з регулярним розвиненням збурень:

$$\mathcal{O}(1):\ 0 = (-\partial_t + \mathfrak{L}^{\epsilon})u_0^{\epsilon}, \tag{16}$$

$$\mathcal{O}\left(\sqrt{\delta}\right):\ 0 = (-\partial_t + \mathfrak{L}^{\epsilon})u_1^{\epsilon} + \mathfrak{M}^{\epsilon}u_0^{\epsilon}. \tag{17}$$

У рівняннях (16) і (17) застосуємо сингулярне розвинення збурень по відношенню до ∈. Підставимо (14) – (15) в (16) і зберемо члени зі степенями √∈. У результаті порядок $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$ і $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right)$ рівняння:

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon}\right):\ 0 = \mathfrak{L}_0 u_{0,0}, \tag{18}$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right):\ 0 = \mathfrak{L}_0 u_{1,0} + \mathfrak{L}_1 u_{0,0}. \tag{19}$$

якщо $u_{0,0}$ і $u_{1,0}$ не залежать від y, то вони задовольняють рівняння (18) і (19), тому вибираємо $u_{0,0} = u_{0,0}(t, x, z)$ і $u_{1,0} = u_{1,0}(t, x, z)$. Проведемо асимптотичний аналіз для порядку $O(1)$ і $O(\sqrt{\in})$:

$$\mathcal{O}(1):\ 0 = \mathfrak{L}_0 u_{2,0} + (-\partial_t + \mathfrak{L}_2)u_{0,0}, \tag{20}$$

$$\mathcal{O}\left(\sqrt{\epsilon}\right):\ 0 = \mathfrak{L}_0 u_{3,0} + \mathfrak{L}_1 u_{2,0} + (-\partial_t + \mathfrak{L}_2)u_{1,0} \tag{21}$$

Рівняння (20) і (21) є рівняннями Пуассона вигляду:

$$0 = \mathfrak{L}_0 u + \mathcal{X}. \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
&u \in dom(\mathfrak{L}_0) = \mathbb{L}^2(\mathbb{R},\pi)\\
&\langle\mathcal{X}\rangle := \int \mathcal{X}(y)\pi(y)dy = 0,
\end{aligned} \tag{23}$$

З рівнянь (20) і (21) і умови центрованості (23) випливає:

$$\mathcal{O}(1):\ 0 = (-\partial_t + \langle\mathfrak{L}_2\rangle)u_{0,0}, \tag{24}$$

$$\mathcal{O}\left(\sqrt{\epsilon}\right):\ 0 = \langle\mathfrak{L}_1 u_{2,0}\rangle + (-\partial_t + \langle\mathfrak{L}_2\rangle)u_{1,0}. \tag{25}$$

Оператор $\langle\mathfrak{L}_2\rangle$ має вигляд:

$$\begin{aligned}
&\langle\mathfrak{L}_2\rangle = \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 a^2(x)\partial_{xx}^2 +\\
&+ \big(b(x) - \overline{f\Omega}a(x)\big)\partial_x - k(x),\ x \in (e_1, e_2)
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\bar{\sigma}^2 := < f^2(\cdot,z) >,\ \ \overline{f\Omega} := < f(\cdot,z)\Omega(\cdot,z) >.$$

Враховуючи відповідні крайові умови, знайдемо розв'язок рівняння (24):

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_1 u_{2,0} &= -(-\partial_t + \mathfrak{L}_2)u_{0,0} = -(-\partial_t + \mathfrak{L}_2)u_{0,0} + (-\partial_t + \langle\mathfrak{L}_2\rangle)u_{0,0}\\
&= -\left(\frac{1}{2}a^2(f^2 - \bar{\sigma}^2)\partial_{xx}^2 - a\big(f\Omega - \overline{f\Omega}\big)\partial_x\right)u_{0,0}.
\end{aligned}$$

Позначимо $\phi(y, z)$ і $\eta(y, z)$ розв'язки рівнянь Пуассона:

$$\mathfrak{L}_0\phi = f^2 - \bar{\sigma}^2, \quad \mathfrak{L}_0\eta = f\Omega - \overline{f\Omega}. \qquad (27)$$

Використовуючи (27), знайдемо $u_{2,0}$ як:

$$u_{2,0} = -\left(\frac{1}{2}a^2\phi\partial_{xx}^2 - a\eta\partial_x\right)u_{0,0} + C, \qquad (28)$$

де C – константа, незалежна від y. Підставимо (12) і (28) в $\langle\mathfrak{L}_0 u_{2,0}\rangle$ і отримаємо:

$$\langle\mathfrak{L}_1 u_{2,0}\rangle = \langle(\beta(\rho_{xy}af\partial_x - \Lambda)\partial_y) \times \\ \times\left(\frac{1}{2}a^2\phi\partial_{xx}^2 - a\eta\partial_x\right)u_{0,0}\rangle = -\mathcal{A}u_{0,0}. \qquad (29)$$

Оператор $\mathcal{A}$ має вигляд:

$$\mathcal{A} = -\nu_3 a(x)\partial_x a^2(x)\partial_{xx}^2 - \nu_2 a^2(x)\partial_{xx}^2 \\ - \mathcal{U}_2 a(x)\partial_x a(x)\partial_x - \mathcal{U}_1 a(x)\partial_x, \qquad (30)$$

де $\nu_3 = -\frac{\rho_{xy}}{2}\langle\beta f\partial_y\phi\rangle, \nu_2 = \frac{1}{2}\langle\beta\Lambda\partial_y\phi\rangle,$

$$\mathcal{U}_2 = \rho_{xy}\langle\beta f\partial_y\eta\rangle, \mathcal{U}_1 = -\langle\beta\Lambda\partial_y\eta\rangle.$$

Підставивши (29) в (25), отримаємо:

$$\mathcal{A}u_{0,0} = (-\partial_t + \langle\mathfrak{L}_2\rangle)u_{1,0}. \qquad (31)$$

Враховуючи вираз для $u_{0,0}$ і відповідні крайові умови, можна знайти вираз для $u_{1,0}$. Повернемося до рівняння $O(\sqrt{\delta})$. Для сингулярного аналізу збурень рівняння (17), підставимо (14) і (15) в (17) згрупуємо по степенях $\sqrt{\in}$. У результаті для $O(\sqrt{\delta}/\in)$ і $O(\sqrt{\delta}/\sqrt{\in})$ маємо рівняння:

$$\mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\delta}}{\epsilon}\right): \ 0 = \mathfrak{L}_0 u_{0,1}, \qquad (32)$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\epsilon}}\right) \ 0 = \mathfrak{L}_0 u_{1,1} + \mathfrak{L}_1 u_{0,1}, \qquad (33)$$

де $\mathfrak{M}_3 u_{0,0} = 0$. Якщо $u_{0,1}$ і $u_{1,1}$ не залежать від y, то вони автоматично будуть задовольняти рівняння (32) та (33), тому $u_{0,1} = u_{0,1}(x, z)$ і $u_{1,1} = u_{1,1}(x, z)$. Продовжуючи асимптотичний аналіз, для $O(\sqrt{\delta})$ маємо рівняння:

$$\mathcal{O}\left(\sqrt{\delta}\right) \ 0 = \mathfrak{L}_0 u_{2,1} + (-\partial_t + \mathfrak{L}_2)u_{0,1} + \mathfrak{M}_1 u_{0,0}, \qquad (34)$$

оскільки $\mathfrak{L}_1 u_{1,1} = 0$ і $\mathfrak{M}_3 u_{1,0} = 0$ для (34) знайдемо розв'язок $u_{2,1} \in L^2(\mathbb{R}, \pi)$, умова центрування (23) виконується. У (34) умові центрування відповідає

$$0 = (-\partial_t + \mathfrak{L}_2)u_{0,1} + \langle\mathfrak{M}_1\rangle u_{0,0}, \qquad (35)$$

де $u_{0,0}(t, x, z)$ залежить від z тільки через $\bar{\sigma}$ і $\overline{f\Omega}(z)$. Таким чином, у (35) $\langle\mathfrak{M}_1\rangle$ можна записати: $\langle\mathfrak{M}_1\rangle = -\mathcal{B}\partial_z$,

$$\mathcal{B} = -\nu_1 a(x)\partial_x - \nu_0, \ \nu_1 := g\rho_{xz}\langle f\rangle, \ \nu_0 = g\langle\Gamma\rangle, \qquad (36)$$

$$\partial_z = \bar{\sigma}'^{\partial_{\bar{\sigma}}} + \overline{f\Omega}'^{\partial_{\overline{f\Omega}}}, \quad \bar{\sigma}' := \partial_z\overline{f\Omega}. \qquad (37)$$

$$\mathcal{O}(1): \ (-\partial_t + \langle\mathfrak{L}_2\rangle)u_{0,0} = 0 \ \ u_{0,0}(0, x, z) = H(x), \qquad (38)$$

$$\mathcal{O}(\sqrt{\epsilon}): \ \ (-\partial_t + \langle\mathfrak{L}_2\rangle)u_{1,0} = \mathcal{A}u_{0,0}, \ u_{1,0}(0, x, z) = 0, \qquad (39)$$

$$\mathcal{O}\left(\sqrt{\delta}\right): \ (-\partial_t + \langle\mathfrak{L}_2\rangle)u_{0,1} = \mathcal{B}\partial_z u_{0,0}, \\ u_{0,1}(0, x, z) = 0. \qquad (40)$$

Оператори $\langle\mathfrak{L}_2\rangle$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ та ∂_z визначені в (26), (30), (36) та (37) відповідно, та введені крайові умови при $t = 0$.

Розв'яжемо рівняння (38) – (40) з точки зору власних функцій $\{\psi_n\}$, власних значень $\{\lambda_n\}$ оператора $\langle\mathfrak{L}_2\rangle$. Відмітимо, що $\langle\mathfrak{L}_2\rangle$, поданий у (26), має вигляд інфінітезимального генератора одномірної дифузії (3) з волатильністю $\bar{\sigma}\,a(x)$, відхиленням $(b(x) - (\overline{f\Omega})\,a(x))$ і кіллінг з рівнем $k(x)$, $dom(\langle\mathfrak{L}_2\rangle)$ включає крайові умови, які накладені на кінцях e_1 та e_2. Припустимо що $\langle\mathfrak{L}_2\rangle$ має чисто дискретний спектр. Зафіксуємо Гільбертів простір $\mathcal{H} = \mathfrak{L}^2(I, m)$, де m – щільність швидкості, яка відповідає $\langle\mathfrak{L}_2\rangle$. Оператор $\langle\mathfrak{L}_2\rangle$ самоспряжений в $\mathcal{H}$, і його область визначення є щільною підмножиною в $\mathcal{H}$. Таким чином, власні функції $\{\psi_n\}$ оператора $\langle\mathfrak{L}_2\rangle$ формують ортогональну базу в $\mathcal{H}$. Позначимо:

$$dom(\mathcal{A}) := \{\psi \in \mathcal{H}, \mathcal{A}\psi \in \mathcal{H}\}$$
$$dom(\mathcal{B}) := \{\psi \in \mathcal{H}, \mathcal{B}\psi \in \mathcal{H}\},$$
$$dom(\partial_z) := \{\psi \in \mathcal{H}, \partial_z\psi \in \mathcal{H}\}.$$

Теорема 1: Нехай рівняння власного значення:

$$-\langle\mathfrak{L}_2\rangle\psi_n = \lambda_n\psi_n, \ \psi_n \in dom(\langle\mathfrak{L}_2\rangle), \qquad (41)$$

і припустимо, що $H \in \mathcal{H}$. Тоді розв'язок $u_{0,0}$ можна подати у вигляді:

$$u_{0,0} = \sum_n c_n\psi_n T_n, \ \ c_n = (\psi_n, H), \ T_n = e^{-t\lambda_n}.$$

Теорема 2: Нехай c_n, ψn, Tn є такими, як описано в теоремі 1 і визначимо

$$\mathcal{A}_{k,n} := (\psi_k, \mathcal{A}\psi_n), \ U_{k,n} := \frac{T_k - T_n}{\lambda_k - \lambda_n}.$$

Тоді розв'язок $u_{1,0}$ рівняння (40) має вигляд:

$$u_{1,0} = \sum_n\sum_{k\neq n} c_n A_{k,n}\psi_k U_{k,n} - \sum_n c_n\mathcal{A}_{n,n}\psi_n t T_n. \qquad (42)$$

Теорема 3: Нехай c_n, ψ_n і T_n є такими, як описано в теоремі 1, нехай $U(k, n)$ є таким, як в Теоремі 2, визначимо

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{k,n} := (\psi_k, \mathcal{B}\partial_Z\psi_n), \mathcal{B}_{k,n} := (\psi_k, \mathcal{B}\psi_n),$$
$$V_{k,n} := \frac{T_k - T_n}{(\lambda_k - \lambda_n)^2} + \frac{tT_n}{\lambda_k - \lambda_n}$$

Тоді розв'язок $u_{0,1}$ рівняння (39) має вигляд:

$$u_{0,1} = \sum_n\sum_{k\neq n} c_n\widetilde{\mathcal{B}}_{k,n}\psi_k U_{k,n} - \sum_n c_n\widetilde{\mathcal{B}}_{n,n}\psi_n t T_n \\ + \sum_n\sum_{k\neq n}(\partial_z c_n)\mathcal{B}_{k,n}\psi_k U_{k,n} - \\ - \sum_n(\partial_z c_n)\mathcal{B}_{n,n}\psi_n t T_n + \sum_n\sum_{k\neq n} c_n\mathcal{B}_{k,n}\psi_k(\partial_z\lambda_n)V_{k,n} \\ - \sum_n c_n\mathcal{B}_{n,n}\psi_n(\partial_z\lambda_n)\frac{1}{2}t^2 T_n. \qquad (43)$$

Отримані наближення для ціни похідного активу мають вигляд $u^{\epsilon,\delta} \approx u_{0,0} + \sqrt{\in}\,u_{1,0} + \sqrt{\delta}\,u_{0,1}$. Однак дана похідна покладена на формальні сингулярні і регулярні аргументи збурень. Для більш точного результату вимагаємо щоб функція виплати $H(x)$ і всі її похідні були гладкими і обмеженими. Тоді уточнення виглядає таким чином.

Теорема 4: Для фіксованих (t, x, y, z) існує стала C така, що для будь-якого $\in \leq 1$, $\delta \leq 1$ маємо:

$$\left|u^{\epsilon,\delta} - \left(u_{0,0} + \sqrt{\epsilon}u_{1,0} + \sqrt{\delta}u_{0,1}\right)\right| \leq C(\epsilon + \delta).$$

Розглянемо приклад. Нехай X – цінний папір, по якому не виплачуються дивіденди. У нашому випадку X – модель ГБР з багатовимірною стохастичною волатильністю. Зокрема, $\widetilde{\mathbb{P}}$ динаміки в X задані:

$$dX_t = rX_t dt + f(Y_t, Z_t) X_t d\tilde{W}_t^x, \; h(X_t) = 0,$$

де r – безризикова відсоткова ставка, а Y, і Z є швидкими і повільними факторами нестабільності, які описані в (7). Відзначимо, що за зниженою ціною активу $e^{-rt}X_t$ є мартингалом під $\widetilde{\mathbb{P}}$. Обчислимо приблизну ціну опціону подвійного бар'єра визначеного на X. Спочатку використаємо рівняння (4) і (26), щоб записати оператор $\langle \mathfrak{L}_2 \rangle$ і пов'язані з ним щільності зі швидкістю $m(x)$:

$$\langle \mathfrak{L}_2 \rangle = \frac{1}{2}\bar{\sigma}^2 x^2 \partial_{xx}^2 + rx\partial_x - r,$$
$$m(x) = \frac{2}{\bar{\sigma}^2 x^2} exp\left(\frac{2r}{\bar{\sigma}^2}\ln x\right) \qquad \textbf{(44)}$$

Для подвійного бар'єру опціону з бар'єрами L і R опціон виплат:

$$H(X_t)\mathbb{I}_{\{\tau>t\}} = (X_t - K)^+ \mathbb{I}_{\{\tau>t\}},$$
$$I = (L, R),\; 0 < L < K < R.$$

Щоб обчислити значення цього параметра, ми повинні спочатку знайти власні значення рівняння (41) з $\langle \mathfrak{L}_2 \rangle$, подані в (44) і з крайовими умовами

$$\lim_{x\searrow L}\psi_n(x) = 0,\; \lim_{x\nearrow R}\psi_n(x) = 0.$$

$$\psi_n(x) = \frac{\bar{\sigma}\sqrt{x}}{\sqrt{\ln\left(\frac{R}{L}\right)}}\exp\left(\frac{-r}{\bar{\sigma}^2}\ln x\right) sin\left(\frac{n\pi\ln\left(\frac{x}{L}\right)}{\ln\left(\frac{R}{L}\right)}\right),\; n = 1,2,3,\ldots,$$

$$\lambda_n = \frac{1}{2}\left(\frac{n\pi\bar{\sigma}}{\ln\left(\frac{R}{L}\right)}\right)^2 + \left(\frac{\nu^2}{2} + r\right),\;\; \nu = \frac{r}{\bar{\sigma}} - \frac{\bar{\sigma}}{2}$$

розрахуємо коефіцієнти $\mathcal{A}_{k,n}$, $\mathcal{B}_{k,n}$, $\widetilde{\mathcal{B}}_{k,n}$. Для $k \neq n$ ми знайдемо

$$\mathcal{A}_{k,n} = -\vartheta_3\frac{\left(\begin{array}{l}(-1+(-1)^{k+n})kn(4n^2\pi^2\bar{\sigma}^4 \\ +(-12r^2+4r\bar{\sigma}^2+\bar{\sigma}^4)\ln^2(\frac{R}{L}))\end{array}\right)}{2(k^2-n^2)\bar{\sigma}^4\ln^3(\frac{R}{L})}$$
$$-\vartheta_2\left(\frac{(-1+(-1)^{k+n})knr}{(k^2-n^2)\bar{\sigma}^2\ln\left(\frac{R}{L}\right)}\right),$$

$$\mathcal{B}_{k,n} = \vartheta_1\frac{2(-1+(-1)^{k+n})kn}{(k-n)(k+n)\ln\left(\frac{R}{L}\right)},$$

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{k,n} = -\vartheta_1\bar{\sigma}'(\Upsilon_{k,n}) - \vartheta_0\bar{\sigma}'\left(\frac{8(-1+(-1)^{k+n})knr\ln\left(\frac{R}{L}\right)}{(k^2-n^2)^2\pi^2\bar{\sigma}^3}\right),$$

$$\Upsilon_{k,n} := \frac{4nkr(\ln(L)-(-1)^{k+n}\ln(R))}{(k^2-n^2)\bar{\sigma}^3\ln\left(\frac{R}{L}\right)}$$
$$-\frac{2(-1+(-1)^{k+n})kn\left(\begin{array}{l}(k-n)(k+n)\pi^2\bar{\sigma}^4 \\ -2r(-2r+\bar{\sigma}^2)\ln^2\left(\frac{R}{L}\right)\end{array}\right)}{(k^2-n^2)^2\pi^2\bar{\sigma}^5\ln\left(\frac{R}{L}\right)},$$

і для $k = n$ знайдемо:

$$\mathcal{A}_{n,n} = -\vartheta_3\left(\frac{1}{\bar{\sigma}^3}\left(\frac{3n^2\pi^2\nu}{\ln^2\left(\frac{R}{L}\right)} - \nu^3\right) - \frac{1}{\bar{\sigma}^2}\left(\nu^2 - \frac{n^2\pi^2}{\ln^2\left(\frac{R}{L}\right)}\right)\right.$$
$$\left. - \vartheta_2\left(\frac{1}{\bar{\sigma}^2}\left(\nu^2 - \frac{n^2\pi^2}{\ln^2_L\left(\frac{R}{}\right)}\right) + \frac{\nu}{\bar{\sigma}}\right)\right),$$

$$\mathcal{B}_{n,n} = \vartheta_1\left(\frac{2r-\bar{\sigma}^2}{2\bar{\sigma}^2}\right) - \vartheta_0,$$

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{n,n} = -\vartheta_1\bar{\sigma}'\left(\frac{1}{\bar{\sigma}} - \frac{r\nu\left(\ln^2(R)-\ln^2(L)\right)}{\bar{\sigma}^4\ln\left(\frac{R}{L}\right)}\right)$$
$$-\vartheta_0\bar{\sigma}'\left(\frac{1}{\bar{\sigma}} - \frac{r\left(\ln^2(R)-\ln^2(L)\right)}{\bar{\sigma}^3\ln\left(\frac{R}{L}\right)}\right).$$

$$c_n = (\psi_{\text{т}}(\cdot), (\cdot - K)^+) = \frac{L^{\frac{\nu}{\bar{\sigma}}}}{\ln\left(\frac{R}{L}\right)}\left(L\Phi_n(\nu+\bar{\sigma}) - K\Phi_n(\nu)\right),$$

$$\Phi_n(z) := \frac{2}{\omega_n^2 + z^2}(\exp(\mathfrak{K}z)\,(\omega_n\cos\,(\omega_n\mathfrak{K})$$
$$- zsin(\omega_n\mathfrak{K}) - \exp(\mathfrak{U}z)\,(-1)^n\omega_n),$$

$$\omega_n := \frac{n\pi}{\mathfrak{U}},\; \mathfrak{K} := \frac{1}{\bar{\sigma}}\ln\left(\frac{K}{L}\right),\; \mathfrak{U} := \frac{}{\bar{\sigma}}\ln\left(\frac{}{L}\right).$$

Орієнтовні ціни опціонів обчислимо за допомогою теорем 1 – 3.

На лівій частині *рис. 1* зображена наближена ціна $u_{0,0} + \sqrt{\varepsilon}\, u_{1,0}$ з подвійним бар'єром опціону для конкретної моделі, яка має тільки швидко змінні чинники волатильності у припущенні, що відома динаміка Y і функції волатильності $f := \sigma\exp(Y_t + Z_t)\exp\left(\frac{\beta^2}{2} - z\right)$:

$$dY_t = \left(-\frac{1}{\in}Y_t - \frac{1}{\sqrt{\in}}\frac{\beta}{\sqrt{\in}}erf(Y_t)\right)dt + \beta d\tilde{W}_t^y,$$
$$f(Y_t) = \frac{\sigma\exp(Y_t)}{\exp\left(-\frac{\beta^2}{2}\right)},\; erf(y) := \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^y e^{-t^2}dt. \qquad \textbf{(45)}$$

Права частина *рис. 1* репрезентує наближену ціну $u_{0,0} + \sqrt{\delta}\, u_{0,1}$ з подвійним бар'єром опціону на конкретну модель, яка містить чинники волатильності, що змінюються повільно, за умови, що динаміка Z і функції волатильності задана

$$dZ_t = (-\delta Z_t - \sqrt{\delta}g\; erf(Z_t))\,dt + \sqrt{\delta}g d\tilde{W}_t^z,$$
$$f(Z_t) = \frac{\sigma\exp(Z_t)}{\exp(z)}. \qquad \textbf{(46)}$$

Ця стаття розвиває загальний метод отримання орієнтовної ціни для широкого класу похідних-активів. Виграш похідних може бути шляхозалежним процесом, що лежить в основі похідної-активу, і може проявляти стрибок, також комбіновані нелокальні стохастичні волатильності. Інтенсивність стрибка може бути залежною. Нелокальна компонента волатильності може бути багатовимірною. Її спонукають один швидко мінливий і один повільно фактори. Однією з ключових переваг на-

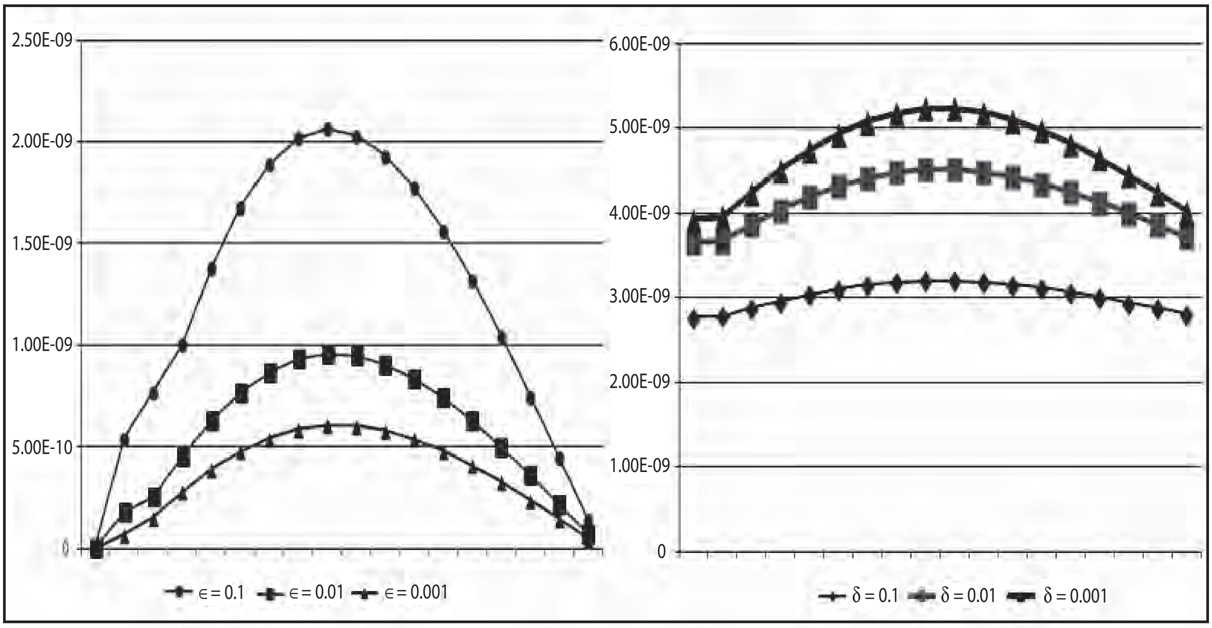

Рис. 1. Ціна опціону з подвійним бар'єром, L = 300, K = 350, R = 400, y = 0, z = 2, β = 1, σ = 0,34, r = 0,05, g = 2, ρ_{xy} = 0,5, ρ_{xz} = 0,18, ρ_{xy} = 0,18.

шої методології ціноутворення є те, що, комбінуючи методи зі спектральної теорії, теорії сингулярних збурень і регулярної теорії збурень, ми зводимо обчислення ціни активу до розв'язання одного рівняння для знаходження власних значень. ■

ЛІТЕРАТУРА

1. **Anderson T. W.** Introduction to Multivariate Statistical Analysis / T. W. Anderson. – New York, 1968.– P. 584.

2. **Благун І. С.** Спектральний аналіз динаміки валютних курсів / І. С. Благун, І. В. Буртняк // Економічна кібернетика. – 2005. – № 5-6. – С. 86 – 93.

3. **Благун І. С.** Застосування методів крос-спектрального аналізу для виявлення взаємозв'язку між рядами значень фінансових ресурсів / І. С. Благун, І. В. Буртняк // Зб. наук. праць «Моделювання регіональної економіки». – Івано-Франківськ : Плай, 2005. – № 1(5). – С. 3 – 13.

PREFERENCES

Anderson, T. *W.Introduction to Multivariate Statistical Analysis*. New York, 1968.

Blahun, I. S., and Burtniak, I. V. "Spektralnyi analiz dynamiky valiutnykh kursiv [Spectral analysis of changes in foreign exchange rates]." *Ekonomichna kibernetyka*, no. 5-6 (2005): 86-93.

Blahun, I. S., and Burtniak, I. V. "Zastosuvannia metodiv kros-spektralnoho analizu dlia vyiavlennia vzaiemozv'iazku mizh riadamy znachen finansovykh resursiv [Application of cross-spectral analysis to identify the relationship between the rows values of financial resources]." *Modeliuvannia rehionalnoi ekonomiky*, no. 1(5) (2005): 3-13.