УДК 330.46

ОСОБЕННОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ОДНОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА С ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМ ПРОГРЕССОМ

ДИЛЕНКО В. А.

кандидат экономических наук

Одесса

Отличительной чертой современной экономики является высокая значимость в ее функционировании инновационной деятельности. Данное обстоятельство определяет актуальность исследования влияния фактора научно-технического прогресса на процессы экономического развития. Одним из основных экономико-математических инструментов указанных исследований могут служить модели экономического роста.

Известны различные варианты классических макроэкономических моделей оптимального экономического роста, их современных модификаций и интерпретаций для анализа соответствующих экономических задач [3; 4 с. 425 – 439; 5, с. 116 – 121; 6 и др.]. Если воздействие научно-технического прогресса в этих моделях учитывается, то он традиционно отражается в производственных функциях, которые являются существенным элементом данных моделей роста, в форме автономного НТП, например, нейтрального по Хиксу [7, с. 92 – 98] или Харроду [8]. Вместе с тем, одной из основных характерных особенностей современного этапа развития экономики является снижение ее капиталоемкости [9], которое можно рассматривать как интегрированный результат инновационных процессов, выступающих на макроэкономическом уровне в виде технологического прогресса.

При исследовании математических моделей оптимального экономического роста главным образом рассматриваются проблемы построения и анализа стационарных (сбалансированных) и оптимальных траекторий эволюции элементов моделируемых экономических систем. Указанные вопросы изучаются и для случая оптимизационных моделей экономического роста, которые отражают в той или иной форме влияние НТП. Однако при этом воздействие собственно технологического прогресса в данных моделях, его интенсивности (темпа НТП) на особенности оптимального развития соответствующих экономических процессов не анализируется.

В связи с изложенным *целью* настоящей работы является построение модели оптимального экономического роста, в которой воздействие автономного НТП отражается с позиции снижения капиталоемкости экономики в процессе ее развития, и исследование данной модели для выявления особенностей влияния интенсивности (темпа) технологического прогресса (некоторых других экзогенных экономических параметров) на характерные свойства оптимальной эволюции анализируемой экономической системы.

Рассмотрим известную математическую модель динамики национального дохода [1; с. 280] (модель макроэкономической динамики Харрода – Домара [2, с. 204 – 209])

$$y(t) = B\frac{dy}{dt} + c(t), \tag{1}$$

где $y(t)$ – величина национального дохода в момент времени t; $u(t) = B\dfrac{dy}{dt}$ – величина производственного накопления; B – капиталоемкость национального дохода; $c(t)$ – величина непроизводственного потребления.

Введем в данную модель инновационный фактор. Будем полагать, что под воздействием научно-технического прогресса величина капиталоемкости B с течением времени снижается согласно закону

$$B(t) = B_0 e^{-kt}, \tag{2}$$

где B_0 – капиталоемкость национального дохода в начальный момент времени, т. е. $B(0) = b_0$, k – параметр, определяющий темп снижения указанной капиталоемкости. Данный параметр можно интерпретировать и как показатель интенсивности (темпа) автономного НТП.

По аналогии с [1, с. 289] на основе математической модели (1), (2) сформулируем задачу определения траекторий динамики национального дохода $y(t)$ и его составляющих $u(t)$ и $c(t)$, доставляющих максимум величине суммарного непроизводственного потребления на интервале времени $[0, T]$:

$$\int_0^T (y(t) - u(t))dt \to \max, \tag{3}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{B_0} e^{kt} u(t), \tag{4}$$

$$0 \le u(t) \le y(t). \tag{5}$$

Оптимизационная модель (3) – (5) представляет собой постановку задачи оптимального управления, в которой управляющим параметром является величина производственного накопления $u(t)$, а фазовой координатой объем национального дохода $y(t)$.

Функция Гамильтона для данной задачи имеет вид

$$H(y, u, p, t) = y(t) - u(t) + p(t)\frac{1}{B_0} e^{kt} u(t), \tag{6}$$

где $p(t)$ – сопряженная переменная.

Известно, что для оптимальной траектории

$$\frac{dp(t)}{dt} = -\frac{dH(y, u, p, t)}{dy}, \tag{7}$$

$$p(T) = 0. \tag{8}$$

Поэтому интегрируя (7) с учетом (8) можно получить следующее выражение для $p(t)$:

$$p(t) = T - t. \tag{9}$$

Тогда функция Гамильтона приобретает вид

$$H(y, u, p, t) = y(t) + [(T - t)\frac{1}{B_0} e^{kt} - 1]u(t). \tag{10}$$

Если $u^*(t)$ оптимальное управление, то тогда согласно принципу максимума теории оптимального управления в каждый момент времени t оно доставляет максимум функции $H(y, u, p, t)$. Соответственно, из (10) с учетом огра-ничения (5) получаем выражения для $u^*(t)$:

$$u^*(t) = \begin{cases} y(t), \text{ если } (T - t)\dfrac{1}{B_0} e^{kt} - 1 > 0 \\ 0, \text{ если } (T - t)\dfrac{1}{B_0} e^{kt} - 1 < 0. \end{cases} \tag{11}$$

Последнее соотношение для удобства дальнейшего анализа целесообразно записать в виде

$$u^*(t) = \begin{cases} y(t), \text{ если } (T - t)e^{kt} > B_0 \\ 0, \text{ если } (T - t)e^{kt} < B_0. \end{cases} \tag{12}$$

Из (12) видно, что оптимальное управление $u^*(t)$ определяется свойствами переключательной функции

$$\varphi(t) = (T - t)e^{kt}, \; 0 \le t \le T. \tag{13}$$

Можно показать, что если $k > 1/T$, то в точке $t^* = T - 1/k$ достигается максимальное значение $\varphi^*(t^*) = 1/k\, e^{kT-1}$ и $\varphi(t), t \in [0, T]$ при $t \in [0, T]$ имеет график *рис. 1a*. В противном случае данная функция является монотонно убывающей и при $0 \le t \le T$ представляется графиком *рис. 1b*.

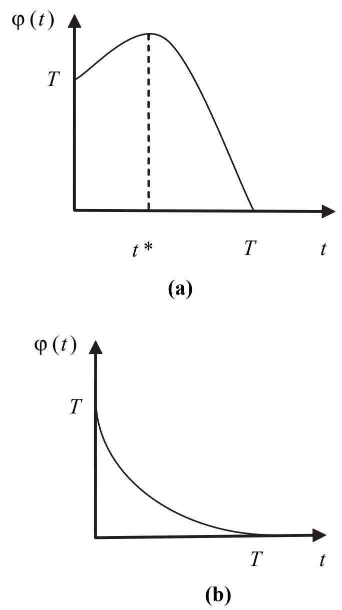


Рис. 1. Графики переключательной функции

Возможны различные варианты соотношения при $0 \le t \le T$ значений функции $\varphi(t)$ и параметра B_0, определяющие вид решения задачи оптимально-го управления (3) – (5). Графически они представлены на *рис. 2* и рис. *3*.

Для каждой из представленных на рис. 2 и рис. 3 ситуаций оптимальное управление и соответственно траектория будут иметь свой специальный вид. Рассмотрим каждую из указанных ситуаций.

Ситуация представленная графиком (2а). Формально она определяется условиями

$$k > \frac{1}{T},\ B_0 > \varphi^*(t^*) = \frac{1}{k} e^{kT-1}. \qquad \textbf{(14)}$$

В соответствии с (12) оптимальное управление в данном случае имеет вид

$$u^*(t) = 0,\ \ 0 \le t \le T. \qquad \textbf{(15)}$$

Тогда согласно (4)

$$y^*(t) = y_0,\ 0 \le t \le T, \qquad \textbf{(16)}$$

где y_0 – величина национального дохода в начальный момент времени $t = 0$ и соответственно

$$c^*(t) = y_0,\ \ 0 \le t \le T. \qquad \textbf{(17)}$$

Таким образом, при выполнении условий (14) оптимальное решение задачи (3) – (5) состоит в том, что величина национального дохода на протяжении всего анализируемого периода равна первоначальной, и он в

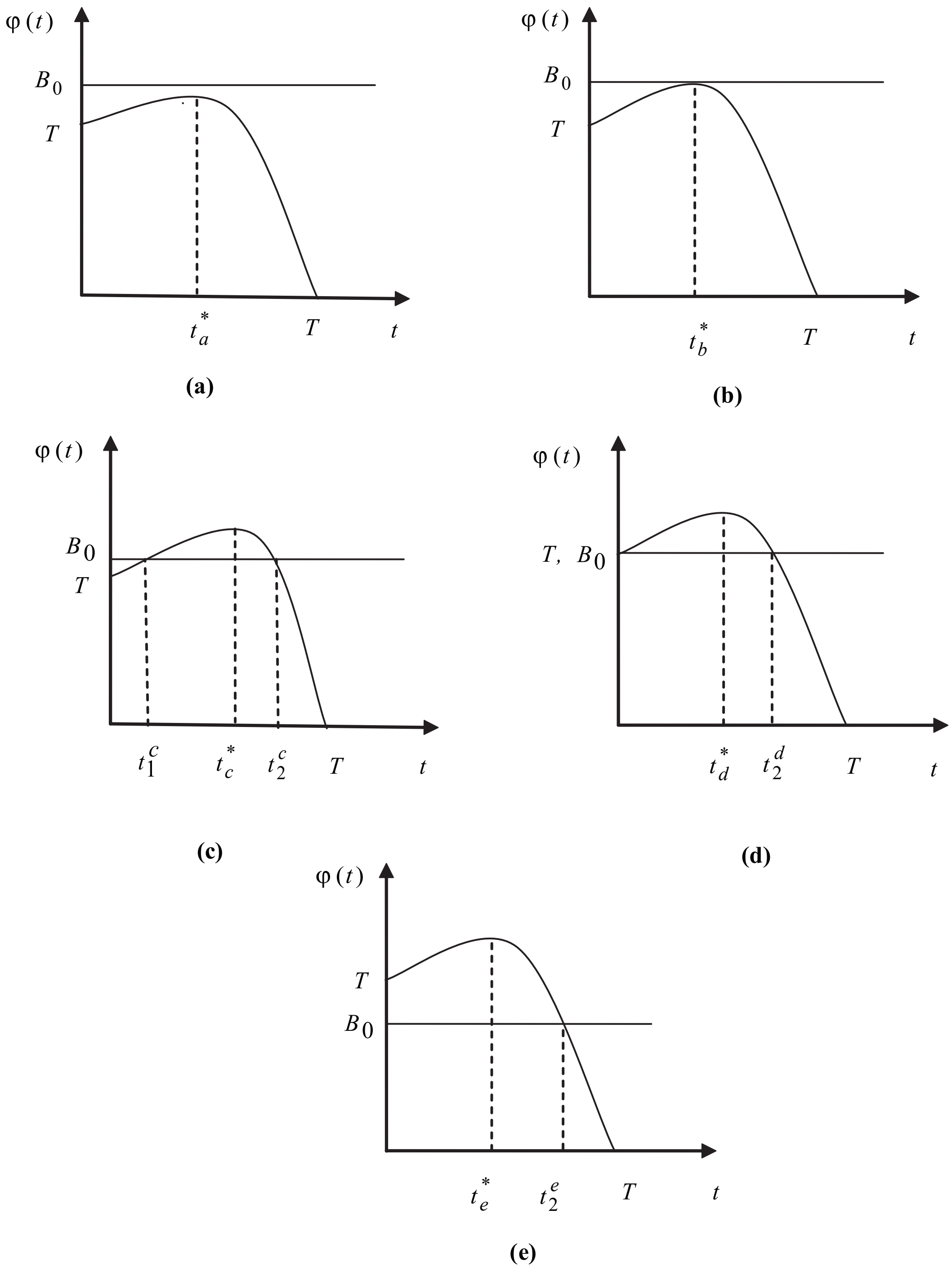


Рис. 2. Соотношения значений функции $\varphi(t)$ и B_0 при k > 1/T

полном объеме должен направляться на непроизводственное потребление, производственное накопление полностью отсутствует (*рис. 4*).

Ситуация (2b) определяется соотношениями

$$k > \frac{1}{T},\ B_0 = \frac{1}{k} e^{kT - 1}. \qquad \mathbf{(18)}$$

Данный случай является аналогичным (2а), за исключением того, что функция $u^*(t)$, а значит и $c^*(t)$, $y^*(t)$ являются неопределенными в точке t^*_b.

Условия

$$k > \frac{1}{T},\ B_0 < \frac{1}{k} e^{kT - 1},\ B_0 > T \qquad \mathbf{(19)}$$

отвечают случаю, представленному на рис. 2с. Для него оптимальное управление $u^*(t)$ в соответствии с (12) имеет вид

$$u^*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < t_1^c \\ y(t), & t_1^c < t < t_2^c. \\ 0, & t_2^c < t \le T \end{cases} \qquad \mathbf{(20)}$$

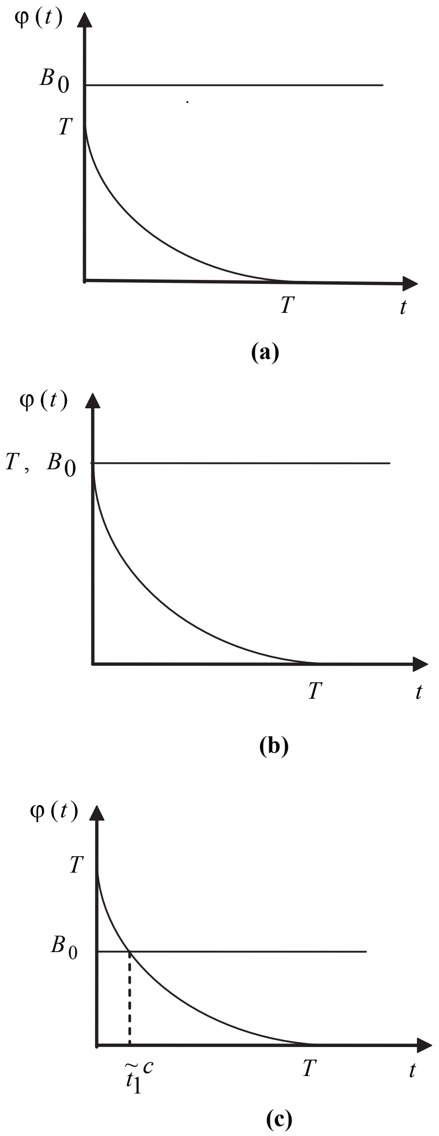


Рис. 3. Соотношения значений функции $\varphi(t)$ и B_0 при $k \le 1/T$

Решая дифференциальное уравнение (4) для данной ситуации получаем оптимальные траектории для национального дохода $y^*(t)$ и непроизводственного потребления $c^*(t)$.

$$y^*(t) = \begin{cases} y_0, & 0 \le t < t_1^c \\ y_0 e^{\frac{1}{B_o k}(e^{kt} - e^{kt_1^c})}, & t_1^c < t < t_2^c; \\ y_0 e^{\frac{1}{B_o k}(e^{kt_2^c} - e^{kt_1^c})}, & t_2^c < t \le T \end{cases} \qquad \mathbf{(21)}$$

$$c^*(t) = \begin{cases} y_0, & 0 \le t < t_1^c \\ 0, & t_1^c < t < t_2^c \\ y_0 e^{\frac{1}{B_o k}(e^{kt_2^c} - e^{kt_1^c})}, & t_2^c < t \le T. \end{cases} \qquad \mathbf{(22)}$$

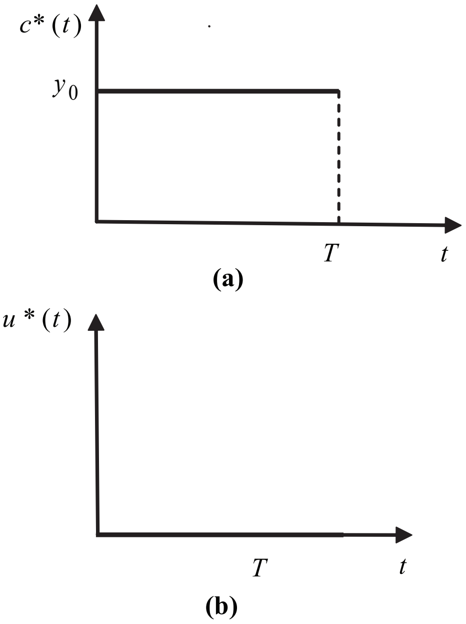


Рис. 4. Оптимальные траектории u*(t) и c*(t) при условиях (14)

Согласно полученному оптимальному решению весь национальный доход, имеющийся на начальный момент времени и сформировавшийся к моменту t_2^c. направляется соответственно при $0 \le t < t_1^c$ и $t_2^c < t \le T$ на непроизводственное потребление, производственное накопление осуществляется на интервале времени $t_1^c < t < t_2^c$ по закону двойной экспоненты, непроизводственное потребление на данном интервале отсутствует. Графически траектории $u^*(t)$ и $c^*(t)$ представлены на *рис. 5*, где $Y^c = y_0 e^{1/(B_o k)(e^{kt_2^c} - e^{kt_1^c})}$.

Ситуация (2d) отвечает условиям

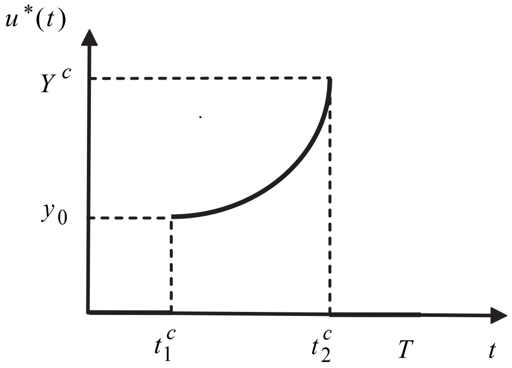
$$k > \frac{1}{T},\ B_0 < \frac{1}{k} e^{kT - 1},\ B_0 = T. \qquad \mathbf{(23)}$$

Для данного случая решением оптимизационной задачи являются следующие оптимальные траектории:

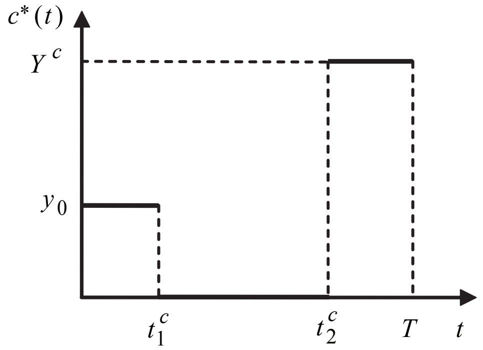
$$u^*(t) = \begin{cases} y(t),\ 0 < t < t_2^d \\ 0,\ t_2^d < t \le T \end{cases}, \qquad (24)$$

$$y^*(t) = \begin{cases} y_0 e^{\frac{1}{B_o k}(e^{kt}-1)},\ 0 < t < t_2^d \\ y_0 e^{\frac{1}{B_o k}(e^{kt_2^d}-1)},\ t_2^d < t \le T \end{cases} \qquad (25)$$

$$c^*(t) = \begin{cases} 0,\ 0 < t < t_2^d \\ y_0 e^{\frac{1}{B_o k}(e^{kt_2^d}-1)},\ t_2^d < t \le T. \end{cases} \qquad (26)$$



(a)



(b)

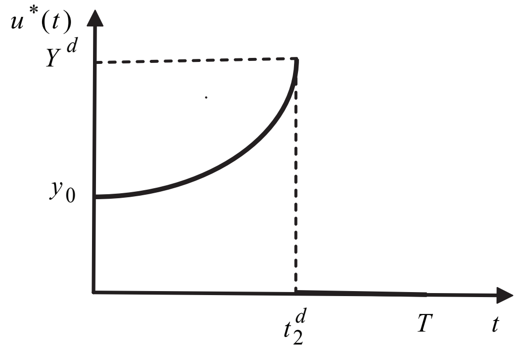
Рис. 5. Оптимальные траектории u*(t) и c*t при условиях (19)

В соответствии с полученным решением в данной ситуации весь плановый период разбивается на два временных интервала. На первом при $0 < t < t_2^d$ весь национальный доход направляется на производственное накопление, бла-годаря чему происходит его рост, непроизводственное потребление полностью отсутствует. На втором интервале $t_2^d < t \le T$ национальный доход используется только на непроизводственное потребление, соответственно его величина сохраняется на неизменном уровне $Y^d = y_0 e^{1/(B_0 k)(e^{kt_2^d}-1)}$. Графики оптимальных траекторий и для ситуации (2d) приведены на *рис. 6*.

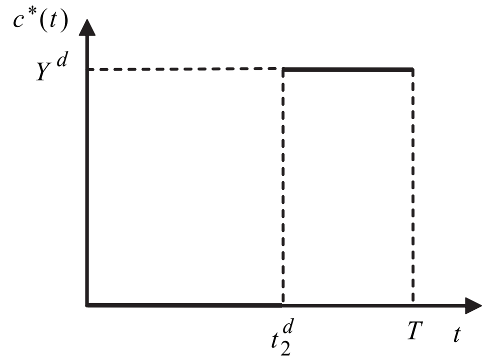
Ситуация (2е), для которой

$$k > \frac{1}{T},\ B_0 < \frac{1}{k} e^{kT-1},\ B_0 < T, \qquad (27)$$

практически идентична ранее рассмотренной (2d). Отличие состоит лишь в том, что в точке $t = 0$ функции $u^*(t), y^*(t), c^*(t)$ определены и принимают значения $u^*(t) = y_0$, $y^*(t) = y_0$ и $c^*(t) = 0$.



(a)



(b)

Рис. 6. Оптимальные траектории u*(t) и c*(t) при условиях (23)

Рассмотрим далее ситуации, характерные для различных соотношений значений B_0 и $\varphi(t)$ при $k \le 1/T$ (графики рис. 3).

Ситуация (3а), определяемая неравенствами

$$k \le \frac{1}{T},\ B_0 > T, \qquad (28)$$

полностью совпадает со случаем (3а), оптимальные траектории $u^*(t), y^*(t), c^*(t)$ имеют вид, задаваемый соответственно соотношениями (15) – (17).

Ситуация (3b), отвечающая условиям

$$k \le \frac{1}{T},\ B_0 = T, \qquad (29)$$

отличается от (3а) только тем, что при $t = 0$ функции $u^*(t), y^*(t)$ и $c^*(t)$ являются неопределенными.

Ситуация (3с), которая определяется соотношениями

$$k \le \frac{1}{T},\ B_0 < T, \qquad (30)$$

аналогична ситуации (2е), различия состоят только в значениях t_2^e и $\tilde{t}_1^c$.

Система решений задачи управления динамикой национального дохода (3) – (5) получена на основе использования принципа максимума, который представляет собой необходимые условия оптимальности. Соответственно, доказательство того, что данные решения являются оптимальными, требует дополнительных исследований. Однако их можно использовать для выявления и анализа свойств, которыми обладают оптимальные решения данной задачи.

Поэтому найденные решения задачи (3) – (5) рассмотрим с целью исследования воздействия интенсивности НТП и величины начальной капиталоемкости национального дохода на характерные особенности ее оптимальных решений. Возможности данного исследования определяются достаточно простым аналитическим видом переключательной функции (13).

При низких значениях темпа технологического прогресса ($k \le 1/T$) его увеличение не приводит к качественному изменению в оптимальном управлении динамикой национального дохода. При $B_0 \ge T$ весь доход направляется на непроизводственное потребление (рис. 4), в случае $B_0 < T$ на временном участке национальный доход в полном объеме расходуется на производственное накопление, в точке $t = \tilde{t}_1^c$ происходит переключение, и весь доход используется на непроизводственное потребление (картина аналогична представленной на рис. 6). В последнем случае следствием роста темпа k является увеличения значения $\tilde{t}_1^c$ и, значит, интервала времени $[0, \tilde{t}_1^c)$, на котором оптимальное управление состоит в расходовании всего национального дохода на производственное накопление (рис. 3с). Соответственно сокращается продолжительность временного участка $(\tilde{t}_1^c, T]$, на котором оптимальным является использование дохода только на непроизводственное потребление.

Более разнообразной оказывается картина воздействия НТП при относительно более высоком значении его темпа прироста $k > 1/T$.

Если $T < B_0$ и исходное значение темпа k_0 удовлетворяет неравенству $B_0 > 1/k_0\, e^{k_0 T - 1}$, т. е. максимальное значение функции $\varphi^*(t^*)$не превышает начальную капиталоемкость национального дохода B_0, то тогда, при увеличении интенсивности воздействия технологического прогресса (росте значения k), оптимальное управление качественно меняется от использования всего дохода на непроизводственное потребления (рис. 4) к такому, которое предполагает наличие двух точек переключения t_1^c, t_2^c. В первой точке происходит переключение от использования всей величины национального дохода на непроизводственное потребления к производственному накоплению, а во второй осуществляется обратный переход (рис. 5). Причем, можно видеть, что рост темпа НТП для ситуации двух точек переключения ведет к сокращению интервалов времени непроизводственного потребления, и соответственно увеличению промежутка времени, в котором весь доход используется на производственное накопление (рис. 2с).

В случае, когда $T \ge B_0$ увеличение темпа технологического прогресса качественно картину оптимального управления не изменяет. Имеется два временных участка: на первом вся масса национального дохода идет на производственное накопление, на втором – на непроизводственное потребление (рис. 6). Однако рост темпа k приводит к количественным изменениям: в анализируемом периоде T происходит увеличение доли первого участка, т. е. увеличивается период времени производственного накопления (рис. 3с).

Рост темпа НТП при всех рассмотренных ситуациях приводит к увеличению интервала времени, для которого оптимальным является использование всего дохода на производственное накопление. Математически данное свойство определяется тем, что для заданного t значение переключательной функции (13) монотонно возрастает с увеличением параметра k.

Проанализируем воздействие изменения величины начальной капиталоемкости национального дохода B_0 на особенности оптимального управления динамикой национального дохода.

Увеличение начальной капиталоемкости B_0 (при исходном соотношении $T > B_0$) приводит к изменению качественной картины оптимального управления от ситуации, при которой на начальном этапе весь национальный доход направляется на производственное накопление, а затем на непроизводственное потребление (рис. 2d, 2e, 3c), к такой, при которой вся величина дохода используется на непроизводственное накопление (рис. 2a, 2b, 3a, 3b). Если при этом $k > 1/T$, то между указанными двумя типами оптимального поведения (при росте k) имеется управление с двумя точками переключения (рис. 2c).

В целом, рост значения начальной капиталоемкости приводит к увеличению интервала времени, на котором оптимальным является использование всего национального дохода на непроизводственное потребление.

При значительном увеличении B_0 (при $B_0 \ge 1/k\, e^{kT-1}$, если $k > 1/T$ и $B_0 \ge T$, если $k \le 1/T$) указанное оптимальное управление распространяется на весь анализируемый период T.

Можно также показать, что рост периода планирования T имеет следствием сокращение доли интервала времени с оптимальным управлением, предполагающим расходование всей величины национального дохода на непроизводственное потребление.

Таким образом, проведенный анализ совокупности решений задачи максимизации суммарного непроизводственного потребления показал, что оптимальное управления динамикой национального дохода $u^*(t)$ обладает следующими свойствами:

- повышение интенсивности НТП стимулирует стратегию достижения максимального суммарного непроизводственного потребления за счет активизации процессов использования национального дохода на производственное накопление;
- рост продолжительности планового периода T также приводит к увеличению (в абсолютном и относительном измерении) интервала времени, для которого оптимальным является

использование всего национального дохода на производственное накопление;

- увеличение исходной капиталоемкости национального дохода является сдерживающим фактор производственного накопления, его рост инициирует развитие «стратегии проедания», вплоть до использования на цели непроизводственного потребления всей массы продуцируемого национального дохода в течение всего рассматриваемого периода времени. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гранберг А. Г.** Моделирование социалистической экономики.– М.: Наука, 1988.– 487 с.
2. **Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. В.** Математические методы в экономике.– М.: Дело и сервис, 2001.– 368 с.
3. **Захарченко П. В.** Магистральная модель курортно-рекреационной экономики // Бизнес Информ.– 2010.– № 4(1).– С. 40 – 43.
4. **Интрилигатор М.** Математические методы оптимизации и экономическая теория.– М.: Айрис-пресс, 2002.– 576 с.
5. **Колемаев В. В.** Математическая экономика.– М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002.– 399 с.
6. **Курзенев В. А., Лычагина Е. Б.** Постановка задачи управления региональной экономикой на основе динамической модели с оценкой состояния // Бизнес Информ.– 2009.– № 2(1).– С. 10 – 13.
7. **Лагоша Б. А.** Оптимальное управление в экономике.– М.: Финансы и статистика, 2003.– 192 с.
8. **Трофимов Г.** О режимах долговременного экономического роста // Вопросы экономики.– 2000.– № 11.– С. 27 – 45.
9. **Федулова Л.** Перспективы инновационно-технологического развития промыш-ленности Украины // Экономика Украины.– 2008.– № 7.– С. 24 – 36.